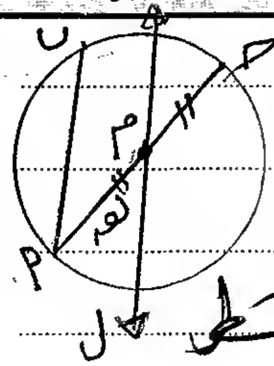
مفاهيم اساسية على الدائرة

الدائرة



* م أ نصف قطر
* أ ب وتر
* أ ج يسمى قطر

ملاحظة

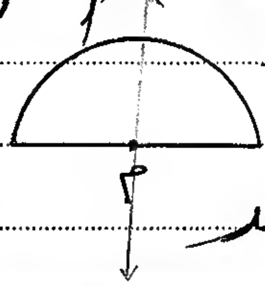
* القطر هو أطول وتر في الدائرة

محور تماثل الدائرة

هو المستقيم المار بمركز الدائرة

والدائرة

عدد لا نهائي من محاور التماثل

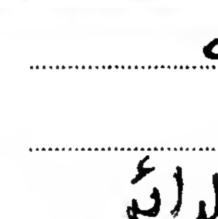


نصف الدائرة

لها محور تماثل واحد

نتائج هامة

1. المستقيم المار بمركز الدائرة وعمودياً على اى وتر فيها ينصف هذا الوتر

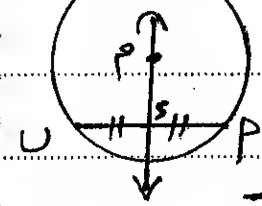


في الشكل

اذا كان $\overline{م د} \perp \overline{أ ب}$

فإن $\boxed{أ د = د ب}$

2. المستقيم المار بمركز الدائرة ومنتصف اى وتر فيها يكون عمودياً عليه

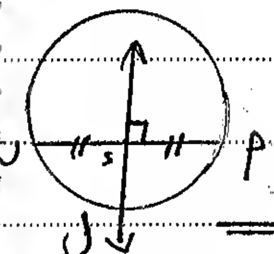


اذا كان

أ د = د ب

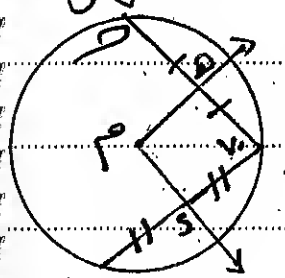
فإن $\overline{م د} \perp \overline{أ ب}$

3. المستقيم العمودي على وتر في دائرة وينصفه يكون ماراً بمركز الدائرة



ل يمر بمركزها م

مثال 1 في الشكل



د منتصف $\overline{أ ب}$

هـ منتصف $\overline{أ ج}$

اوجد ق(∠م)

الحل

∵ أ د = د ب معطى

∴ $\overline{م د} \perp \overline{أ ب}$ نتيجة

∴ ق(∠م د أ) = ٩٠°

بالمثل أ هـ = هـ ج معطى

∴ $\overline{م هـ} \perp \overline{أ ج}$ نتيجة

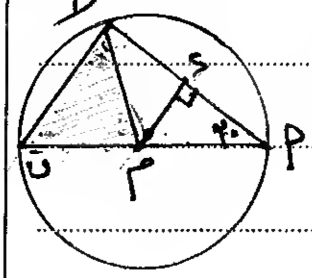
ق(∠أ هـ م) = ٩٠°

∵ مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي = ٣٦٠°

∴ ق(∠م) = ٣٦٠ − (٩٠ + ٩٠ + ٧٠)

∴ ق(∠م) = ١١٠°

مثال ③ في الشكل



أب قطر

م د ⊥ أجـ

اثبت أن

① م د // ب جـ

② △ م ب جـ متساوي الأضلاع

الحل

∵ م د ⊥ أجـ مع

∴ أ د = د جـ ① نتيجة

أب قطر

أ م = م ب ← ②

من ① ، ②

∴ م د // ب جـ ← أولاً

من أولاً

∴ ق(∠ب جـ أ) = ق(∠م د أ) = ٩٠°

بالتناظر

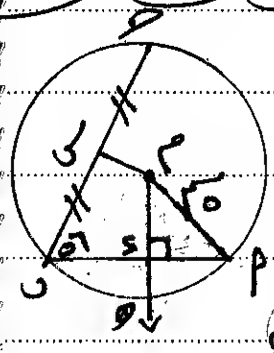
∴ △ أ ب جـ ، ق(∠أ) = ٣٠°

∴ ب جـ = ½ الوتر = أ م

∴ م جـ = م ب = جـ ب = نق

∴ △ م جـ ب متساوي الأضلاع

مثال ④



في الشكل

م دائرة نصف قطرها ٥سم ، أب = ٨سم

أوجد ★ ق(∠م)

★ طول د هـ

الحل

∵ جـ س = س ب مع

∴ م س ⊥ جـ ب نتيجة

∴ ق(∠م س ب) = ٩٠°

∵ ق(∠م د ب) = ٩٠°

∴ ق(∠م)

= ٣٦٠ − (٩٠ + ٩٠ + ٥٦)

= ١٢٤° ← أولاً

∵ م د ⊥ أب مع

∴ أ د = د ب سلم

∴ أ د = ٤ سم

من نظرية فيثاغورث في △ أ م د

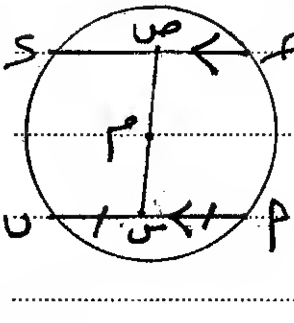
∴ (م د)² = ٢٥ − ١٦

(م د)² = ٩ ← م د = ٣ سم

∵ م هـ = نق = ٥سم

∴ د هـ = ٥ − ٣ = ٢سم

مثال (٤)

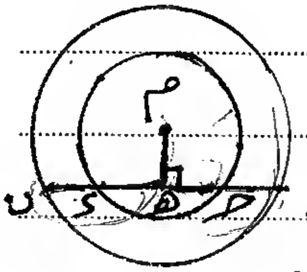


ف الشكل
أب // جـ د
أس = س ب
اثبت ان م ص منتصف جـ د

الحل

∵ أس = س ب معطى
∴ م س ⊥ أب نتيجة
∴ ق(∠م س أ) = ٩٠°
∵ ~~بالتبادل~~
∵ أب // جـ د معطى
∴ ق(∠جـ ص س) + ق(∠أ س ص)
= ١٨٠° بالتداخل
∴ ق(∠جـ ص م) = ٩٠°
∴ م ص ⊥ جـ د
∴ جـ ص = ص د نتيجة

مثال (٥)

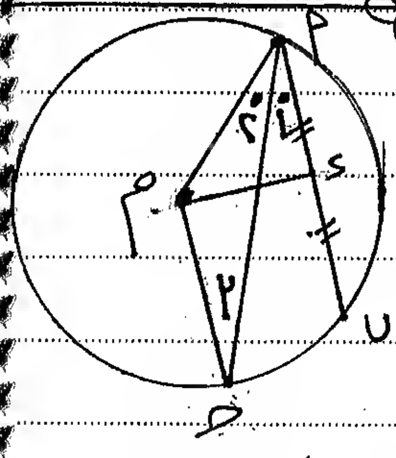


ف الشكل
دائرتان
متحدتا المركز
م هـ ⊥ أب برهان
أجـ = د ب

الحل

ف الدائرة الصغرى
م هـ ⊥ جـ د معطى
∴ $\boxed{\text{جـ هـ = هـ د}}$ ⟵ (١)
ف الدائرة الكبرى
م هـ ⊥ أب معطى
∴ $\boxed{\text{أ هـ = هـ ب}}$ ⟵ (٢)
بطرح (١) من (٢)
∴ أجـ = د ب
هـ.ط.ث

مثال (٦)



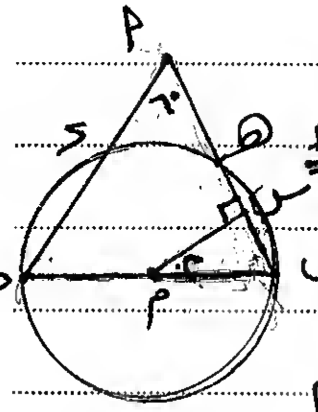
ف الشكل
أد = د ب
أجـ ينصف ∠ب أم
برهن ان م د ⊥ م جـ

الحل

∵ أد = د ب معطى
∴ م د ⊥ أب نتيجة
∴ ق(∠أ د م) = ٩٠°
∵ م أ = م جـ = نق
∴ ق(∠٣) = ق(∠٢)
ق(∠٢) = ق(∠١) معطى

∵ ق(١) = ق(٢)
وهما في وضع تبادل
∴ $\overline{أب}$ // $\overline{مج}$
∵ ق(∠ دمج) = ٩٠°
بالتبادل
∴ $\overline{دم}$ ⊥ $\overline{أب}$
هـ.ط.ث

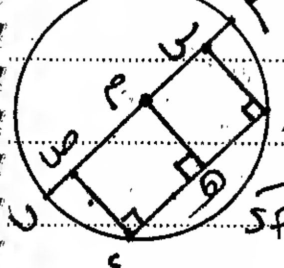
مثال (٧)



في الشكل أب = أج
$\overline{بج}$ قطر
$\overline{مس}$ ⊥ $\overline{به}$
بس = ٢.٥ سم
اوجد طول $\overline{أهـ}$
الحل
∵ $\overline{مس}$ ⊥ $\overline{به}$ معطى
∴ بس = سهـ
∴ بهـ = ٥ سم
∵ أب = أج معطى
∴ ق(ب) = ق(ج) = ٦٠°
لأن ق(أ) = ٦٠°
∴ △ أبج متساوي الأضلاع
في △ بسم القائم
∵ ق(ب) = ٦٠° ∴ ق(م) = ٣٠°

∴ بس = ½ بم (الوتر)
∴ بم = ٥ سم
∴ بج = ١٠ سم
∴ أب = ١٠ سم
∴ أهـ = ٥ سم

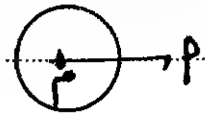
مثال (٨) الشرقية ٢٠٠٩



$\overline{بج}$ قطر م
$\overline{سص}$ ⊥ $\overline{صد}$ ، $\overline{أد}$ ⊥ $\overline{صد}$
اثبت ان أس = بص
الحل
العمل نرسم $\overline{مهـ}$ ⊥ $\overline{صد}$
∵ صهـ = هـد ← نتيجة (١)
∵ $\overline{سص}$ ⊥ $\overline{صد}$
$\overline{أد}$ ⊥ $\overline{صد}$
∴ $\overline{سص}$ // $\overline{مهـ}$ // $\overline{أد}$
∵ صهـ = هـد (١)
∴ سم = مص ← (٢)
تطرح ١ع٢
∵ أم = بم = نق
← (٣)
بطرح (٣) من (٢)
∴ أس = صب
هـ.ط.ث

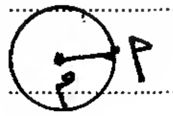
موضع نقطة بالنسبة للدائرة

١ خارج الدائرة



أم > نق

٢ على الدائرة



أم = نق

٣ داخل الدائرة

أم < نق

مثال ١

إذا كانت م دائرة طول قطرها ١٠ سم أوجد موضع أ بالنسبة م

حيث أن

* أم = ١٠ سم
* أم = ٥ سم
* أم = ٣ سم

الحل

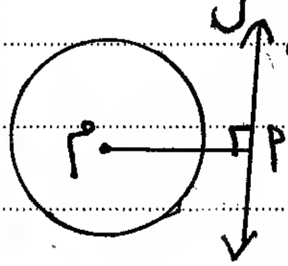
نق = ٥

* أ تقع خارج الدائرة
* أ // على //
* أ // داخل //

سبحان الله وبحمده
سبحان الله العظيم

وضع مستقيم بالنسبة للدائرة

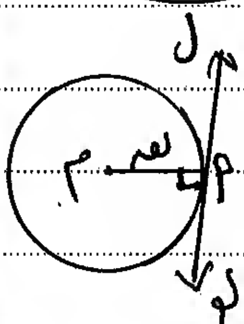
١ خارج الدائرة



أم > نق

ل ∩ م = ϕ

٢ مماس للدائرة

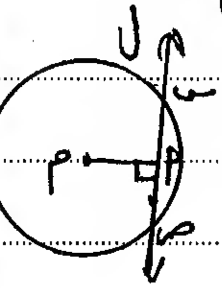


أم = نق

∴ ل مماس

ل ∩ م = {أ}

٣ قاطع للدائرة



أم < نق

ل قاطع للدائرة

ل ∩ م = {س، ص}

مستقيم ل ∩ سطح الدائرة م = $\overline{\text{س ص}}$

* نصف القطر عمودي على المماس من نقطة التماس
* المماسان المرسومان من طرفي قطر في الدائرة متوازيان

مثال ٢

دائرة طول نصف قطرها نق
أم هو البعد العمودي بين
المستقيم ل والدائرة م
أوجد موضع ل من الحالات الآتية

① أم = ٢ نق
② أم = ٣/٤ نق
③ أم = نق
④ أم = ٥/٤ نق

الحل

① أم > نق
∴ ل خارج الدائرة

② أم < نق
ل قاطع للدائرة

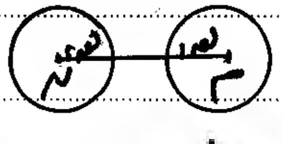
③ أم = نق
∴ ل مماس

④ أم > نق
ل خارج الدائرة

لا حول ولا قوة إلا بالله
كنز من كنوز الجنة

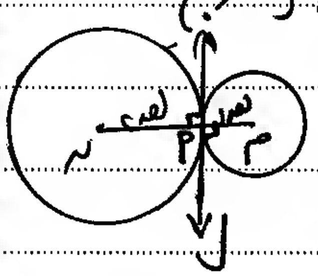
ثالثاً: موضع دائرة بالنسبة لدائرة

① متباعدتان



م ن > نق١ + نق٢
م ∩ ن = ∅

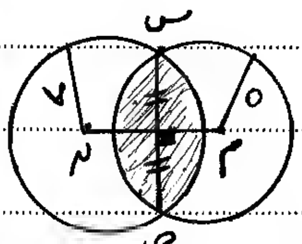
② متماستان من الخارج



م ن = نق١ + نق٢
الدائرة م ∩ ن = {أ}
ل يسمى مماس مشترك

★ خط المركزين لدائرتين متماستين من الخارج يكون عمودياً على المماس المشترك

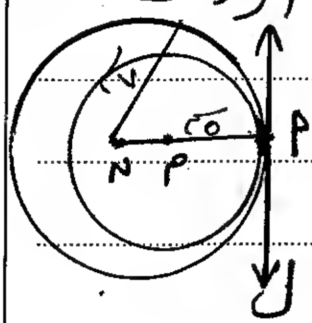
③ متقاطعتان



م ∩ ن = {س، ص}
نق١ − نق٢ < م ن < نق١ + نق٢
م ن ∈]٢ ، ١٢[

ملاحظة
خط المركزين لدائرتين متقاطعتين عمودي على الوتر المشترك وينصفه

④ متماستان من الداخل

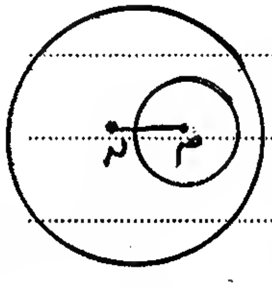


* م ∩ ن = {أ}
* سطح م ∩ سطح ن = سطح م
* $\boxed{\text{م ن = نق}_1 - \text{نق}_2}$

حيث نق١ > نق٢

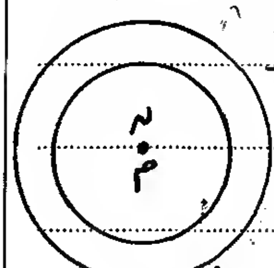
* خط المركزين عمودي على المماس المشترك ل

⑤ متداخلتان



* م ∩ ن = φ
* سطح م ∩ سطح ن = سطح م
* م ن < نق١ − نق٢

⑥ متحدتي المركز



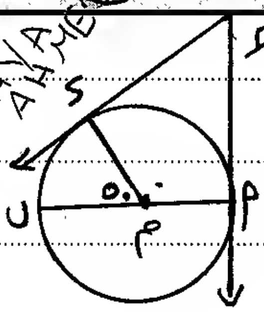
م ∩ ن = φ

م ن = صفر

سطح الدائرة م ∩ سطح ن = سطح م (الصغرى)

من صلى العشاء في جماعة فكأنما قام نصف الليل

مثال ①



في الشكل أ ب قطر

أوجد ق(ح)

الحل

∵ ق(∠أ م د) = ١٨٠° − ٥٠ = ١٢٠

∵ أح ، ح د مماس

نق ⊥ المماس

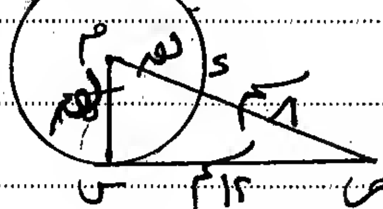
∴ ق(∠أ) = ق(∠د) = ٩٠°

∵ مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي ٣٦٠

∴ ق(ح) = ٣٦٠ − (٩٠ + ٩٠ + ١٢٠)

ق(ح) = ٥٠°

مثال ②



ص س مماس

أوجد نق

الحل

م س ⊥ $\overline{\text{ص س}}$ (المماس)

∴ ق(∠س) = ٩٠° من فيثاغورث

$(٨ + \text{نق})^2 = \text{نق}^2 + (١٢)^2$

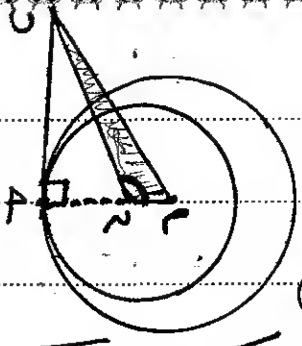
$٦٤ + ١٦\,\text{نق} + \cancel{\text{نق}^2} = \cancel{\text{نق}^2} + ١٤٤$

١٦ نق = ١٤٤ − ٦٤

١٦ نق = ٨٠

نق = ٥ سم

مثال (٢)

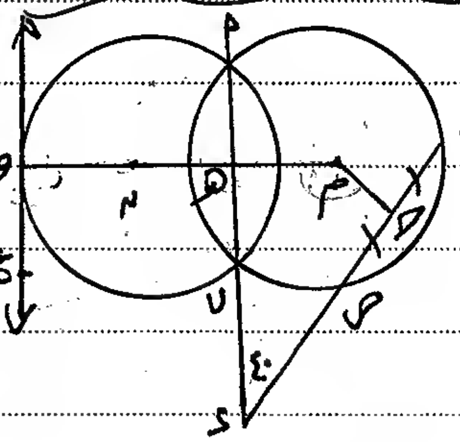


م ، ن دائرتان متماستان من الداخل
نصف قطريهما ١٠ سم ، ٦ سم
أوجد طول $\overline{أب}$ إذا كانت
م Δ ب م ن = ٢٤ سم٢

الحل

م ، ن متماستان من الداخل
م ن = نق١ - نق٢
م ن = ١٠ - ٦ = ٤ سم
م Δ ب م ن = ٢٤ سم٢
$\overline{مأ} \perp \overline{أب}$ (المماس)
½ م ن × أ ب = ٢٤
½ × ٤ × أ ب = ٢٤
٢ أ ب = ٢٤
أ ب = ١٢ سم

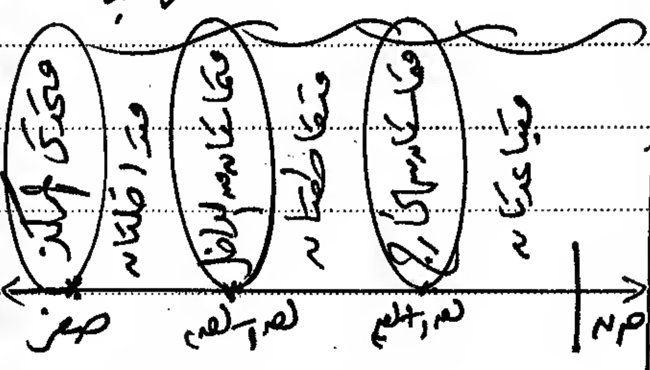
مثال (٤)



في الشكل
$\overleftrightarrow{وع}$ مماس
ص منتصف س ص
أوجد
(١) ق(ص م هـ)
(٢) أثبت أن $\overleftrightarrow{وع} \parallel \overline{أب}$

الحل

∵ س ص = ص ص منتصف
∴ م ص ⊥ س ص سلم
∴ ق(م ص هـ) = ٩٠°
∵ م ن (خط المركزين)
⊥ $\overline{أب}$ (وتر مشترك)
∴ ق(م هـ ب) = ٩٠°
∴ ق(ص م هـ)
= ٣٦٠ - (٩٠ + ٩٠ + ٤٠)
= ١٤٠° ← أولاً
∵ $\overline{نو}$ (نق) ⊥ $\overleftrightarrow{وع}$ (مماس)
حقيقة
∴ ق(ن و ع) = ٩٠°
∵ ق(ن هـ أ) = ٩٠°
وهما داخليتان ومتكاملتان
∴ $\overline{أب} \parallel \overleftrightarrow{وع}$
ثانياً ←



م ، ن دائرتان نصف قطريهما ١١ ، ٧ سم
(٤) اللزوم (١٨) المحور

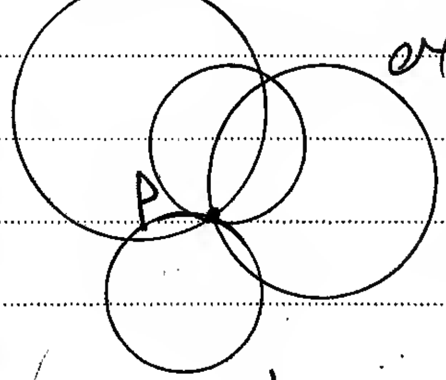
تعيين الدائرة

* تعيين الدائرة بمعلومية

١) نصف القطر   ٢) مركز الدائرة

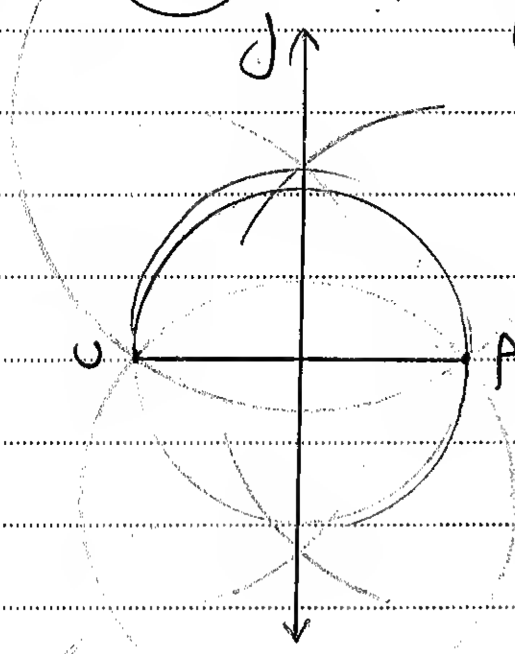
أولاً: رسم دائرة تمر بنقطة واحدة

يمكن رسم عدد لا نهائي من الدوائر تمر بـ أ



ثانياً: رسم دائرة تمر بنقطتين

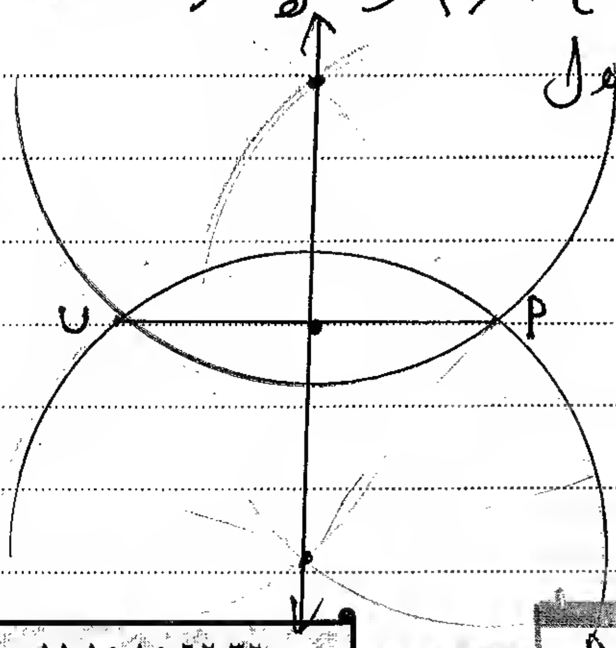
* يمكن رسم عدد لا نهائي من الدوائر تمر بالنقطتين أ، ب
جميع مراكزها على محور أب



* أصغر دائرة تمر بالنقطتين
مركزها هو منتصف أب

مثال ١

ارسم أب طولها ٥ سم ثم ارسم دائرة طول نصف قطرها ٤ سم. كم عدد الحلول الكلي



يمكن رسم دائرتين فقط

عدد الحلول ٢

ملاحظة

في المثال السابق أب طولها ٦ سم إذا كمل

* عدد الدوائر التي يمكن رسمها طول نصف قطرها ٥ سم
دائرة واحدة

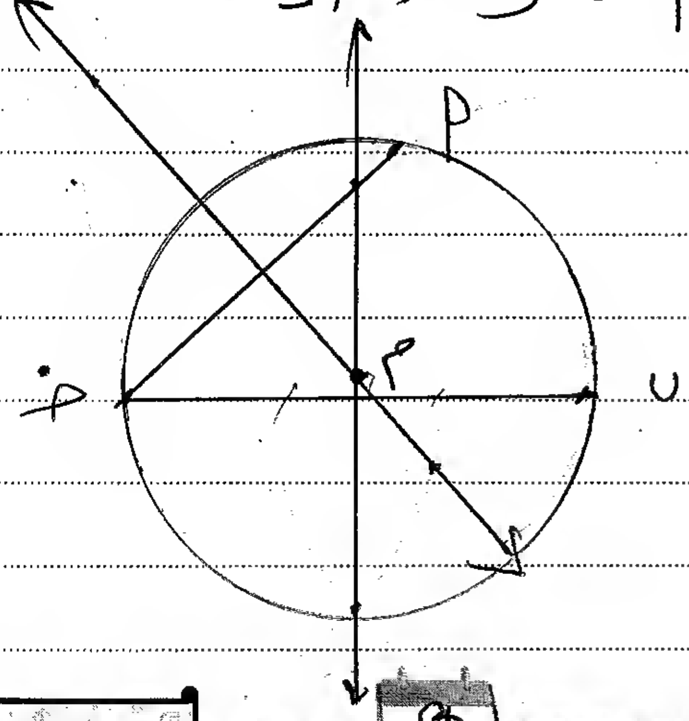
* كم دائرة طول نصف قطرها ٢ سم
لا يوجد

* كم دائرة طول نصف قطرها ٧ سم
٢ دائرتان

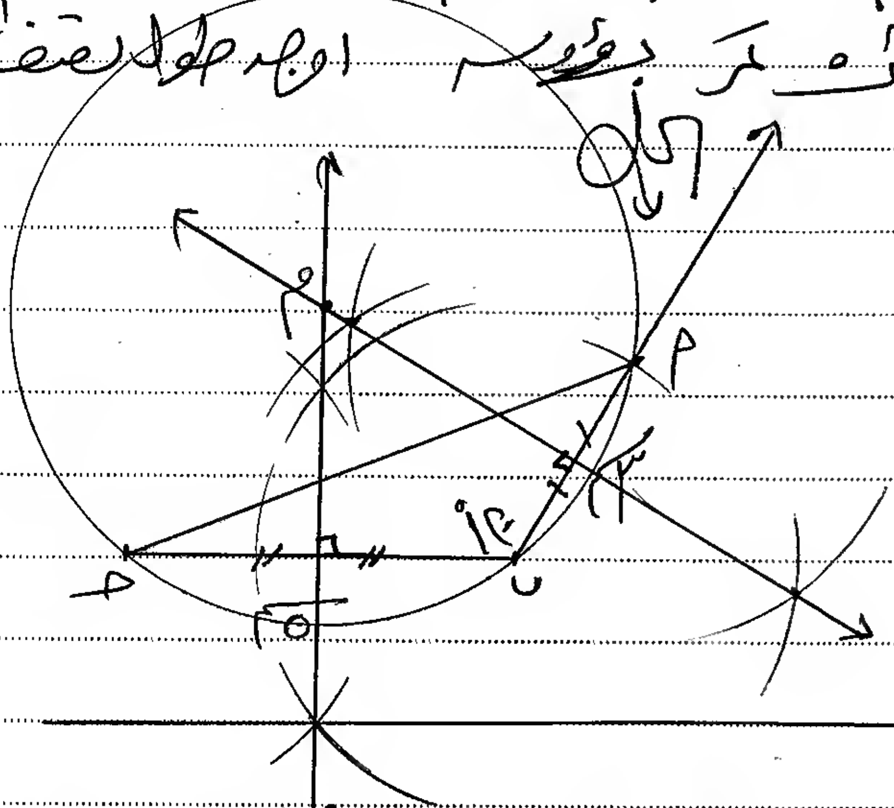
ثالثاً: رسم دائرة تمر بثلاث نقط

١ إذا كانت النقاط على استقامة واحدة
* لا يمكن رسم أي دائرة

٢ إذا كانت النقاط ليست على استقامة واحدة
* يمكن رسم دائرة وحيدة



مثال ① ارسم مثلث أ ب جـ المنفرج الزاوية
حيث ب = ١٢٠° ، أ ب = ٣ سم ، ب جـ = ٥ سم
ثم ارسم دائرة تمر برؤوسه ، اوجد طول نصف قطرها



بالرسم
نق = ٤ سم

ملاحظات

* مركز الدائرة ~~الداخلة~~ الخارجة للمثلث هو نقطة تقاطع محاور اضلاعه

* مركز الدائرة الخارجة للمثلث الحاد يقع داخل المثلث

* مركز الدائرة الخارجة للمثلث المنفرج الزاوية يقع خارج المثلث

* مركز الدائرة الخارجة للمثلث القائم يقع عند منتصف الوتر

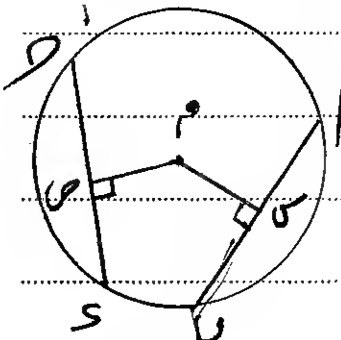
* الدائرة التي تمر برؤوس △ تسمى دائرة خارجة له

إعداد م/ ناصر أبوزيد

الأوتار فى الدائره

نظرية

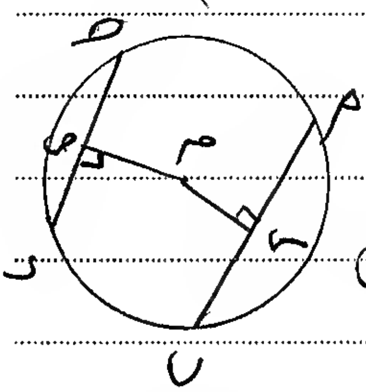
الأوتار المتساوية في الطول في دائرة على أبعاد متساوية من مركزها



أ ب = جـ د

م س = م ص

ملاحظة

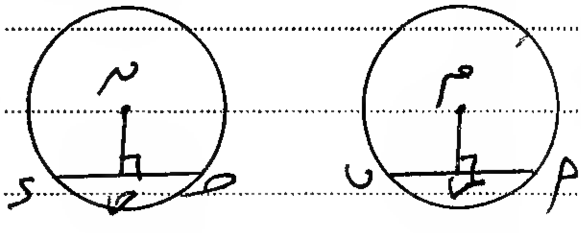


أ ب > جـ د

م س < م ص

نتيجة

الأوتار المتساوية في الطول في الدوائر المتطابقة على أبعاد متساوية من مراكزها

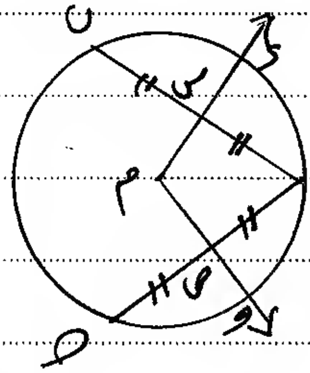


م ≡ ن

أ ب = جـ د

∴ م س = ن ص

مثال ①



أ ب = أ جـ

س، ص منتصفا أ ب، أ جـ

برهن أن: ص و = د س

الحل

∵ أ س = س ب   معطى

∴ م س ⊥ أ ب   نتيجة

∴ م س بعد

∵ أ ص = ص جـ   معطى

∴ م ص ⊥ أ جـ   نتيجة

∴ م ص بعد

∵ أ ب = أ جـ   معطى

∴ م س = م ص   نظرية ⟵ ①

∵ م و = م د = نق ⟵ ②

بطرح ① من ②

∴ د س = و ص

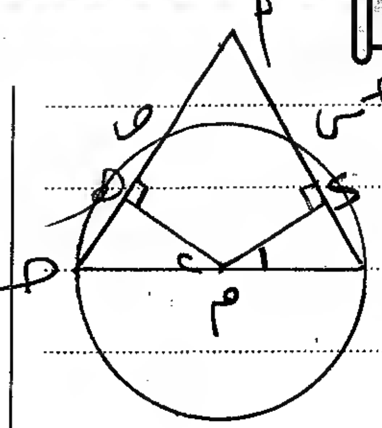
لا تكتئب الهدف بكراً أنت مع الله

لم تبلغ الهدف تلحقه صبراً

ت/ ٠١١١٥١٥٦٢٣٢

إعداد م/ ناصر ابوزيد

مثال ①



أ ب = أ جـ
ب جـ قطر
م ء ⊥ أ ب
م هـ ⊥ أ جـ
برهن أن
ب س = جـ ص

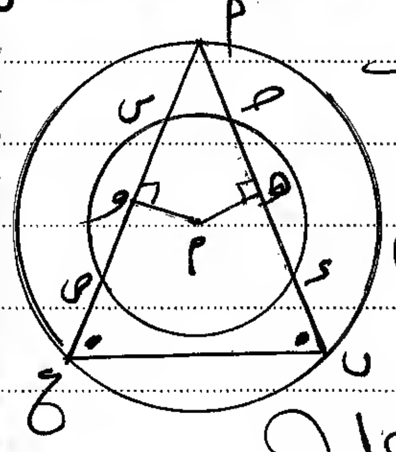
الحل

أ ب = أ جـ معطى
∴ ق(∠ب) = ق(∠جـ)
Δ Δ ب م ء ، جـ م هـ
فيهما:
م ب = م جـ
ق(∠ب) = ق(∠جـ)
ق(∠١) = ق(∠٢)
∴ Δ Δ متطابقان ⟸
م ء = م هـ (الأبعاد)
∴ ب س = جـ ص
عكس النظرية

عكس النظرية

في الدائرة (الدوائر المتطابقة) إذا كانت الأوتار متساوية في البعد عن المركز فإنها تكون متساوية في الطول

مثال ②

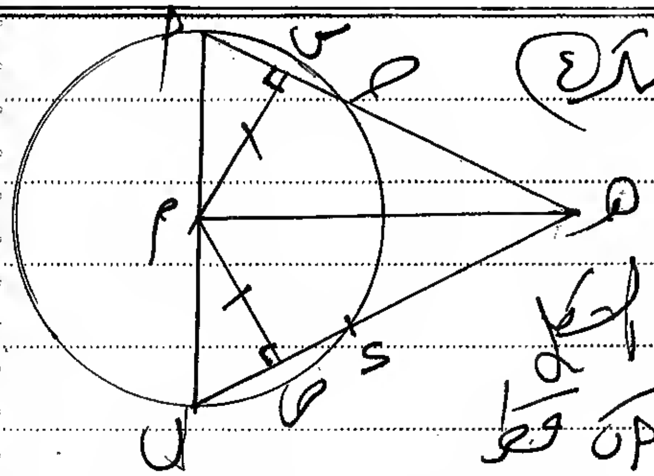


معطى الشكل
ق(∠ب) = ق(∠جـ)
برهن أن
ص ء = س ص

الحل

∵ ق(∠ب) = ق(∠جـ)
∴ أ ب = أ جـ
في الدائرة الكبرى
أ ب = أ جـ إثبات
∴ م هـ = م و نظرية
في الدائرة الصغرى
∵ م هـ = م و إثبات
∴ ص ء = س ص
و.هـ.ط

مثال ④



معطى الشكل
ب جـ قطر
م س = م ص برهن أن
* Δ أ ب هـ متساوي الساقين
* هـ ص = هـ ء

ت/ ٠١١١٥١٥٦٢٣٢

إعداد أ/ ناصر أبوزيد

∵ م س = م ص أبعاد

∴ أ ص = ك ن تطابق (١)

∆ ∆ م س أ ، م ص ب

القائمة فيهما

م أ = م ب

م ص = م س

∴ ∆ ∆ ≡ ⇐

ق(ن) = ق(أ)

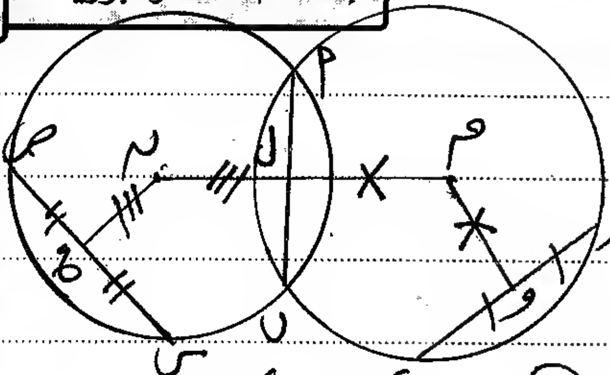
∴ هـ ن = هـ أ ⟵ (٢)

∆ هـ أ ن متساوي الساقين

بطرح ١ من ٢

من (١) ، (٢)

ثانياً ⟵ هـ ص = هـ د



مثال ٤ أثبت أن

م و = م ل ، ن ل = ن ع

أثبت أن ص د = س ص

الحل

∵ ص و = و د منتصف

∴ م و ⊥ ص د

∴ م و بعد

∵ ع منتصف س ص

∴ ن ع ⊥ س ص

∴ ن ع بعد

∵ م ن (خط المركزين) ⊥ أ ب (وتر مشترك)

∴ م ل ، ن ل أبعاد

في الدائرة م

∵ م و = م ل أبعاد

∴ $\boxed{ص د = أ ب}$ (١) للتناظر

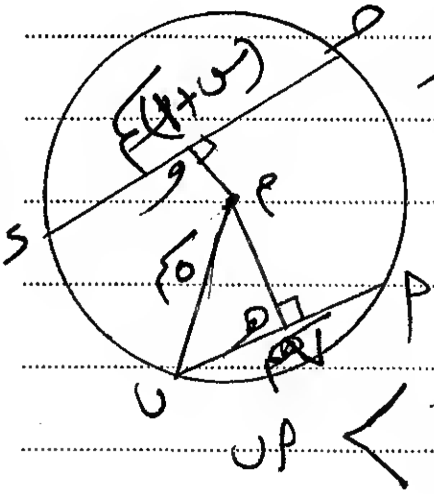
في الدائرة ن

ن ل = ن ع أبعاد

∴ $\boxed{س ص = أ ب}$ (٢) أو تناظر

من (١) ، (٢)

∴ ص د = س ص



م و > م هـ

س ∈ ...

الحل

م و > م هـ

∴ ص د < أ ب

س + ١ < ٧

س < ٦ ∴ ص د أكبر

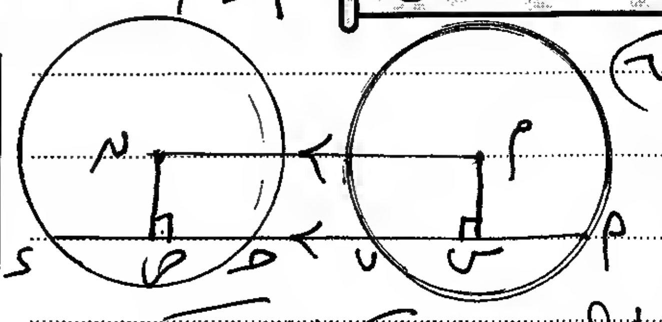
س + ١ ≥ ١٠

س ≤ ٩ ∴ س ∈]٦ ، ٩]

ت/ ٠١١١٥١٥٦٢٣٢

م ≡ ن

٥



المعطى $\overline{أب} \parallel \overline{م ن}$

أثبت أن

أ ص = ب د

البرهان

∵ $\overline{م س} \perp \overline{أ ب}$

$\overline{ن ص} \perp \overline{ج د}$

∴ $\overline{م س} \parallel \overline{ن ص}$

∵ $\overline{م ن} \parallel \overline{س ص}$

∴ الشكل متوازي أضلاع

∵ ق(∠س) = ٩٠°

∴ الشكل م س ص ن مستطيل

∴ $\boxed{م س = ن ص}$ أبعاد

∴ م ≡ ن

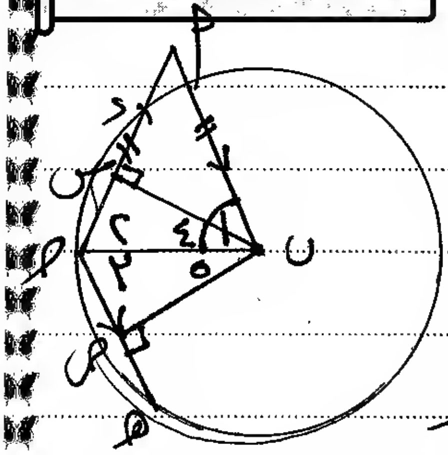
∴ $\boxed{أ س = ص د}$

بإضافة ب ص إلى الطرفين

∴ أ ص = ب د

هـ . أ . ط

مسألة ٧



أ ب = أ ج

$\overline{ج هـ} \parallel \overline{أ ب}$

أثبت

ص هـ = ص د

البرهان

في Δ أ ب = أ ج

ق(∠١) = ق(∠٢)

∵ $\overline{أ ب} \parallel \overline{ج هـ}$ في Δ

∴ ق(∠١) = ق(∠٤)

∴ $\boxed{ق(∠٢) = ق(∠٣)}$

∵ $\overline{ب ص} \perp \overline{هـ ج}$

$\overline{ب س} \perp \overline{د ج}$

∴ ق(∠ص) = ق(∠س) = ٩٠°

Δ Δ ب س ج ، ب ص ج

فيهما:
- ب ج ضلع مشترك
- ق(∠٢) = ق(∠٣)
- ق(∠٤) = ق(∠٥)

∴ Δ ≡ Δ

ب ص = ب س

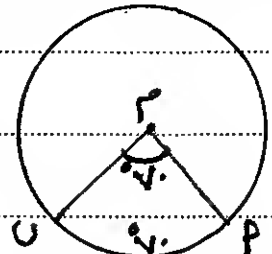
∴ هـ ج = ج د

هـ . أ . ط

الزاوية المركزية والقوس

م مركز

زاوية مركزية



★ $\overset{\frown}{أب}$

★ قياس القوس يساوي قياس الزاوية المركزية المقابلة له

★ طول القوس هو جزء من طول الدائرة

ملاحظة

$$\frac{\text{طول القوس}}{٢ \pi \text{نق}} = \frac{\text{قياس القوس}}{٣٦٠^\circ}$$

★ قياس نصف الدائرة = ١٨٠°

★ " ربع الدائرة = ٩٠°

★ قياس $\frac{٣}{٥}$ الدائرة = $\frac{٣}{٥} \times ٣٦٠ = ٢١٦^\circ$

★ طول نصف الدائرة = π نق

★ طول ربع الدائرة = $\frac{١}{٢} \pi$ نق

مثال (١)

أوجد قياس القوس الذي يمثل $\frac{٢}{٥}$ دائرة وإذا كان طول نصف قطرها ٣٥ سم أوجد طوله

الحل

قياس القوس = $\frac{٢}{٥} \times ٣٦٠ = ١٤٤^\circ$

طول القوس = $\frac{٢}{٥} \times ٢ \pi$ نق

$= \frac{٢}{٥} \times ٢ \times \frac{٢٢}{٧} \times ٣٥$

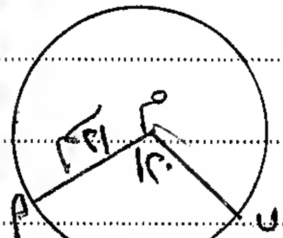
= ٨٨ سم

مثال (٢)

دائرة م طول نصف قطرها ٢١ سم

أ، ب $\in$ للدائرة، ق($\angle$ أ م ب) = ١٢٠° أوجد طول $\overset{\frown}{أب}$

الحل



ق($\overset{\frown}{أب}$) = ١٢٠°

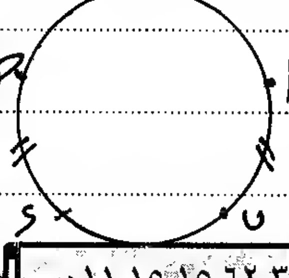
طول القوس = $\frac{١٢٠}{٣٦٠} \times ٢ \pi$ نق

$= \cancel{\frac{١}{٣}} \times ٢ \times \cancel{\frac{٢٢}{٧}} \times \cancel{٢١}$

= ٤٤ سم

نتائج هامة

(١) في الدائرة الواحدة (المتطابقة) الأقواس المتساوية في القياس متساوية في الطول والعكس صحيح

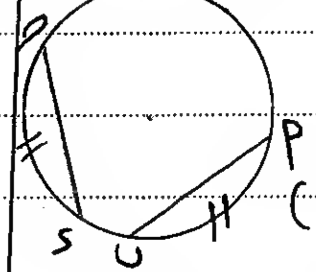


ق($\overset{\frown}{أب}$) = ق($\overset{\frown}{جـد}$)

فإنه

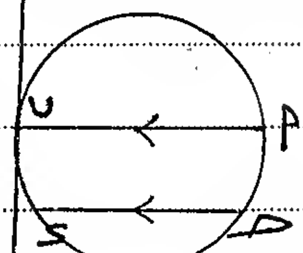
طول $\overset{\frown}{أب}$ = طول $\overset{\frown}{جـد}$

(٢) في الدائرة الواحدة (المتطابقة) الأقواس المتساوية في القياس أوتارها متساوية في الطول والعكس صحيح



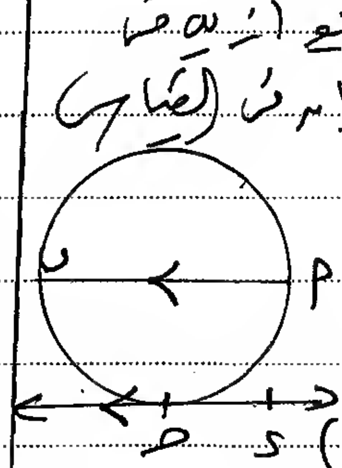
أب = جـ د
ق(أب⌒) = ق(جـ د⌒)

(٣) الوتران المتوازيان في الدائرة يحصران قوسين متساويين في القياس



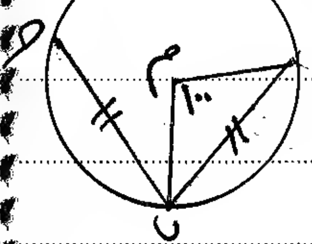
أب // جـ د
فإن
ق(أجـ⌒) = ق(ب د⌒)

(٤) القوسان المحصوران بين وتر ومماس يوازيه في الدائرة متساويان في القياس



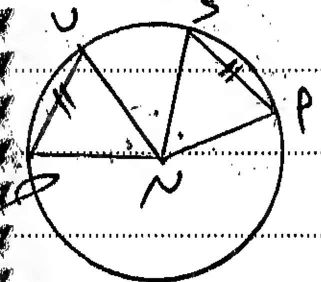
أب // جـ د
جـ د (مماس)
فإن
ق(أجـ⌒) = ق(ب جـ⌒)

مثال (١)



في الشكل
أب = ب جـ
أوجد ق(ب جـ⌒)
الحل
∵ أب = ب جـ معطى
∴ ق(أب⌒) = ق(ب جـ⌒) نتيجة
∵ ق(أب⌒) = ق(∠م) = ١٠٠°
∴ ق(ب جـ⌒) = ١٠٠°

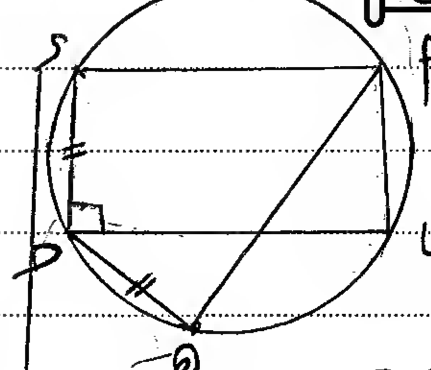
مثال (٢)



أد = ب جـ
برهن أن
ق(∠أ ن ب) = ق(∠د ن جـ)
الحل
أد = ب جـ معطى
∴ ق(أد⌒) = ق(ب جـ⌒)
بإضافة ق(د ب⌒)
∴ ق(أ د ب⌒) = ق(د ب جـ⌒)
∴ ق(∠أ ن ب) = ق(∠د ن جـ)
هـ ط

سبحان الله وبحمده
سبحان الله العظيم

إعداد أ/ ناصر أبوزيد



[٣] في الشكل

أ ب جـ د مستطيل

هـ جـ = جـ د

برهن أن أ هـ = ب جـ

الحل

∵ أ ب = د جـ

من الشكل مستطيل

∵ د جـ = هـ جـ معطى

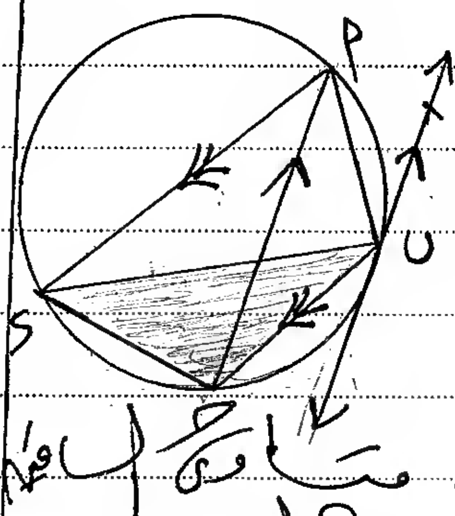
∴ $\boxed{\text{أ ب = هـ جـ}}$

∴ ق(أ ب⌒) = ق(هـ جـ⌒)

بإضافة ق(ب هـ⌒) إلى الطرفين

∴ ق(أ ب هـ⌒) = ق(ب هـ جـ⌒)

∴ أ هـ = ب جـ سلم



[٤] ب هـ مماس في ب

ب هـ // أ جـ

ب جـ // أ د

برهن أن

△ ب جـ د متساوي الساقين

الحل

∵ ب هـ (مماس) // أ جـ معطى

∴ ق(أ ب⌒) = ق(ب جـ⌒) نظرية ①

∵ ب جـ // أ د معطى

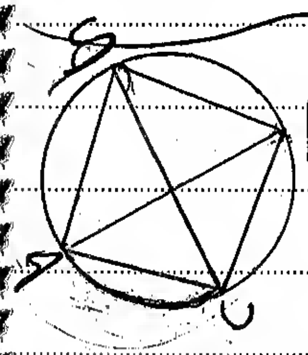
∴ ق(أ ب⌒) = ق(جـ د⌒) نظرية ②

من ①، ②

∴ ق(ب جـ⌒) = ق(جـ د⌒)

∴ ب جـ = جـ د سلم

∴ △ ب جـ د متساوي الساقين



[٥] في الشكل

أ جـ = ب د

برهن أن

أ ب = جـ د

الحل

∵ أ جـ = ب د

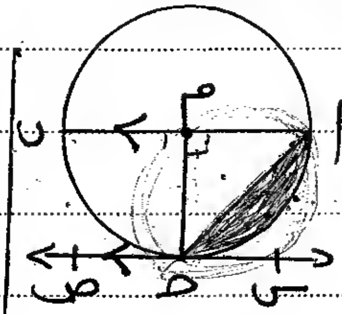
∴ ق(أ ب جـ⌒) = ق(ب جـ د⌒)

بحذف ق(ب جـ⌒) من الطرفين

∴ ق(أ ب⌒) = ق(جـ د⌒)

∴ أ ب = جـ د

(٧) في الشكل



نق = ٧ سم

$\overline{أب}$ قطر

$\overleftrightarrow{س ص}$ // $\overline{أب}$

أوجد

(١) ق($\overset{\frown}{ب هـ}$) (٢) طول $\overset{\frown}{أ هـ}$

(٣) مساحة المنطقة المظللة

الحل

∵ $\overline{أب}$ // $\overleftrightarrow{س ص}$ (مماس)

∴ ق($\overset{\frown}{أ هـ}$) = ق($\overset{\frown}{هـ ب}$) متساويان

∵ $\overline{أب}$ قطر

∴ ق($\overset{\frown}{أ هـ ب}$) = ١٨٠

∴ ق($\overset{\frown}{هـ ب}$) = ٩٠° ← (١)

ق(∠ هـ م ب) = ٩٠°

طول القوس = $\frac{٩٠}{٣٦٠}$ × ٢ ط نق

= $\frac{١}{٤}$ × ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٧

= ١١ سم ← (٢)

م الجزء المظلل = م $\frac{١}{٤}$ الدائرة − م △ م أ هـ

= $\frac{١}{٤}$ × ط نق² − $\frac{١}{٢}$ × ٧ × ٧

= $\frac{١}{٤}$ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٤٩ − $\frac{١}{٢}$ × ٤٩

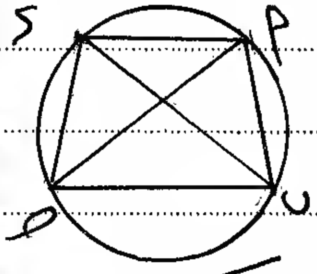
= $\frac{١}{٢}$ (٧٧ − ٤٩)

= $\frac{١}{٢}$ × ٢٨ = ١٤ سم²

ملاحظة

محيط الجزء المظلل = طول $\overset{\frown}{أ هـ}$ + أ هـ

(٨) في الشكل



أ جـ = ب د

أ ب = (٣س − ٥) سم

جـ د = (س + ٣) سم

أوجد طول $\overline{أب}$

الحل

∵ أ جـ = ب د

∴ ق($\overset{\frown}{أ ب جـ}$) = ق($\overset{\frown}{ب جـ د}$)

بحذف ق($\overset{\frown}{ب جـ}$)

ق($\overset{\frown}{أ ب}$) = ق($\overset{\frown}{د جـ}$)

أ ب = د جـ

∴ ٣س − ٥ = س + ٣

٢س = ٥ + ٣

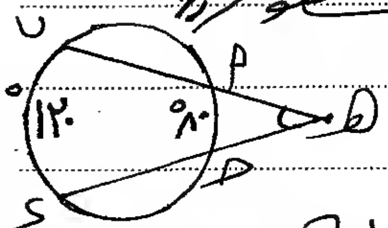
٢س = ٨

س = ٤

∴ أ ب = ١٢ − ٥

أ ب = ٧ سم

تمرين صـ ١١٠ كتاب

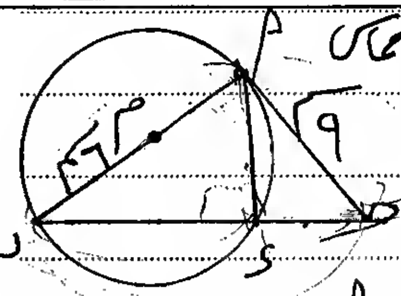


$$ق(\angle هـ) = \frac{1}{2}\left[ق(\overset{\frown}{بد}) - ق(\overset{\frown}{أجـ})\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[١٢٠ - ٨٠\right] = ٢٠^\circ$$

مثال ②

$\overline{جـ أ}$ مماس ، أجـ = ٩



اوجد بجـ ، أد

الحل

∵ $\overline{م أ}$ (نق) ⊥ $\overline{أجـ}$ (مماس)

∴ ق(∠جـ أ ب) = ٩٠°

∵ $\overline{أب}$ قطر

∴ ق(∠أ د ب) = ٩٠°

∴ أب = ١٢ سم

من فيثاغورث

$(بجـ)^2 = (٩)^2 + (١٢)^2$

$(بجـ)^2 = ٨١ + ١٤٤ = ٢٢٥$

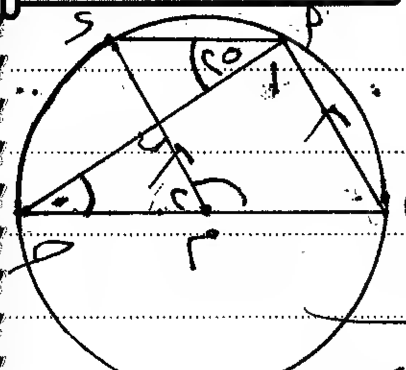
بجـ = ١٥ سم

من اقليدس

$$أد = \frac{أجـ \times أب}{بجـ}$$

$$= \frac{٩ \times ١٢}{١٥} = ٧,٢ \text{ سم}$$

مثال ③



$\overline{بجـ}$ قطر

$\overline{أب}$ // $\overline{م د}$

اوجد

ق(∠أ م ب)

الحل

∵ $\overline{بجـ}$ قطر

∴ ق(∠أ) = ٩٠° بتحصيل

ق(∠د أ جـ) المحيطية = ½ ق(∠٤) المركزية

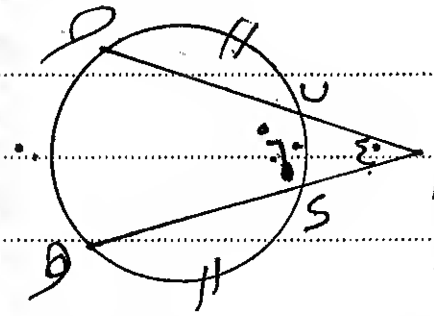
∴ ق(∠٢) = ٥٠°

∵ $\overline{أب}$ // $\overline{م د}$

ق(∠ب) = ٥٠° بالتناظر

ق(∠جـ) = ٩٠ − ٥٠ = ٤٠°

مثال ④



في الشكل

بجـ = د هـ

اوجد

① ق($\overset{\frown}{هـ جـ}$) ② ق($\overset{\frown}{بجـ}$)

الحل

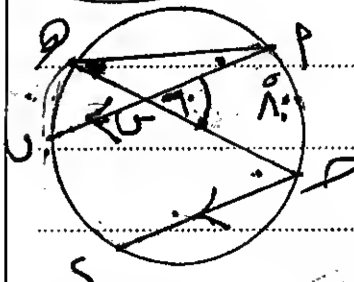
$$٤٠^\circ = \frac{1}{2}ق\left[\overset{\frown}{هـ جـ} - ٦٠\right]$$

$$٨٠ = ق(\overset{\frown}{هـ جـ}) - ٦٠^\circ$$

$$ق(\overset{\frown}{هـ جـ}) = ١٤٠^\circ$$

ق(ب ك) + ق(د هـ)
$= ٣٦٠° - (١٤٠° + ٦٠°)$
$= ١٦٠°$
∴ ق(ب ك) $= \frac{١٦٠}{٢} = ٨٠°$

مثال ⑤



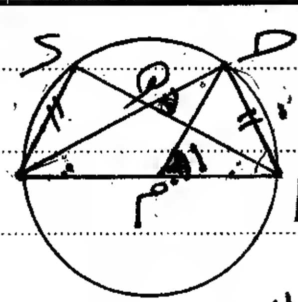
أب // جـ د
اوجد
① ق(أ هـ جـ)
② ق(ب د) ، ③ ق(ب هـ)

الحل

أب // جـ د
∴ ق(ب د) = ق(أ جـ) = ٨٠°
ق(هـ) المحيطية = ½ ق(أ جـ)
∴ ق(هـ) = ٤٠°
∴ ق(جـ) = ٦٠° بالتبادل
ق(د ب هـ) = ٦٠°
ق(هـ ب) = ١٢٠ − ٨٠
= ٤٠°

ملاحظة عليك استخدام المرسومة والمشهور الأولى لإيجاد ب هـ

مثال ⑥



في الشكل
أجـ = ب د
أثبت أن
ق(أ م جـ) = ق(أ هـ جـ)

الحل

∵ أجـ = ب د
∴ ق(أ جـ) = ق(ب د) ①
∵ أب قطر
∴ ق(أ جـ) = ق(م) ①
من المركزية المشهور
ق(هـ) = ½ ق[أ جـ + ب د]
ق(هـ) = ½ × ٢ ق(أ جـ)
ق(هـ) = ق(أ جـ) ②
من ١، ٢
ق(هـ) = ق(م)

من جمال اللغة العربية
قيل
" من أسعدُ الناسِ ؟؟
قال من أسعدَ الناسَ "

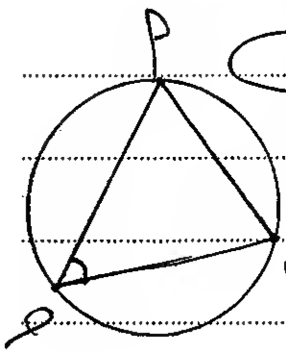
مثال (٧)

أ ب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة فإذا كان

ق(أ⌒ب) : ق(ب⌒جـ) : ق(جـ⌒أ)

= ٥ : ٦ : ٧

فأوجد قياس كل من زوايا Δ أ ب جـ



الحل

نفرض أن

ق(أ⌒ب) = ٥س

ق(ب⌒جـ) = ٦س

ق(جـ⌒أ) = ٧س

∵ قياس الدائرة = ٣٦٠°

∴ ٥س + ٦س + ٧س = ٣٦٠°

١٨س = ٣٦٠°

$\boxed{\text{س} = ٢٠}$

ق(أ⌒ب) = ١٠٠°

ق(ب⌒جـ) = ١٢٠°

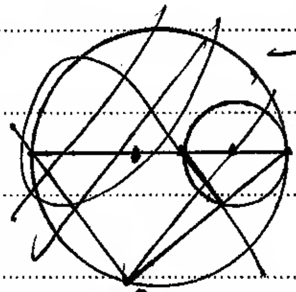
ق(جـ⌒أ) = ١٤٠°

∴ ق(∠جـ) = ٥٠°

ق(∠ب) = ٧٠°

ق(∠أ) = ٦٠°

مثال (٨)

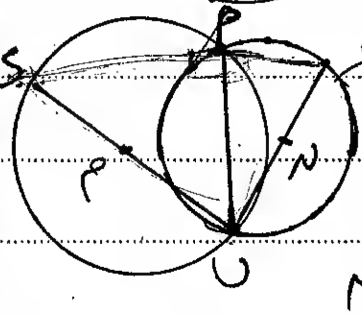


جـ ب قطر

ب ء قطر

برهن أن

جـ ، أ ، ء



على استقامة واحدة

الحل

∵ جـ ب قطر في م

∴ ق(∠جـ أ ب) = ٩٠°

محيطية مرسومة في نصف دائرة

بالمثل ب ء قطر

∴ ق(∠ب أ ء) = ٩٠°

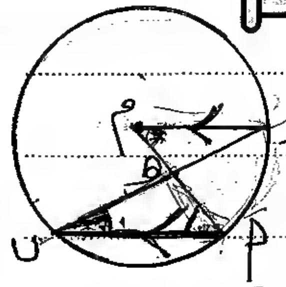
∴ ق(∠جـ أ ء)

= ٩٠° + ٩٠° = ١٨٠°

∴ جـ ، أ ، ء على استقامة واحدة

إعداد أ/ ناصر أبوزيد

شكل (٢)



حـ م // ا ب

اثبت ان

ب هـ > ا هـ

الحل

حـ م // ا ب

ق(∠ م) = ق(∠ ا) بالتبادل (١)

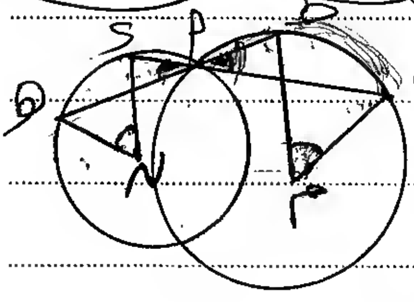
∵ ق(∠ ب) الخارجية > ق(∠ م)

من (١)

∴ ق(∠ ا) > ق(∠ ب)

ب هـ > ا هـ

شكل (١)



ع/ الحل

المعطى اثبت ان

ق(∠ حـ م ب) = ق(∠ د ك هـ)

الحل

∵ ق(∠ ب ا هـ) = ق(∠ حـ ك هـ)

من (١) بالتقابل

∵ ق(∠ ب ا هـ) محيطية = ½ ق(∠ م)

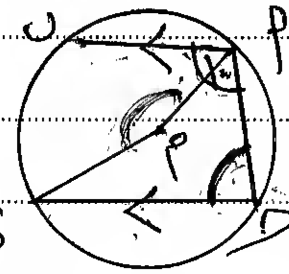
ب م قطر

ق(∠ د ا هـ) محيطية = ½ ق(∠ ك)

من (٢)

من (١)، (٢)

ق(∠ م) = ق(∠ ك)



اب // هـ د

ق(∠ ا) = ١٢٠°

اثبت

ق(∠ ا) = ق(∠ د)

الحل

اب // هـ د

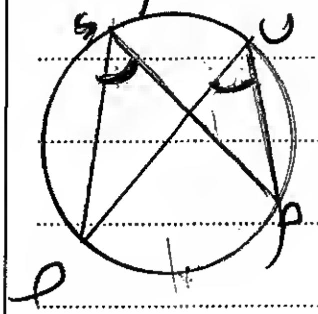
ق(∠ د) = ١٨٠ − ١٢٠ = ٦٠°

∵ ق(∠ د) = ½ ق(∠ م) المركزية

∴ ق(∠ م) = ١٢٠°

نظرية ؟

الزوايا المحيطية التي تحصر نفس القوس متساوية في القياس

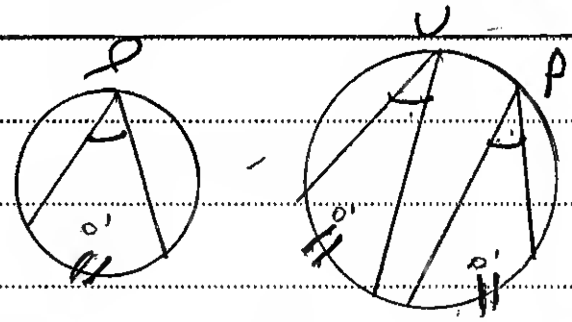


ق(∠ب) = ق(∠ى)

لأنهما تحصران ⌒أح

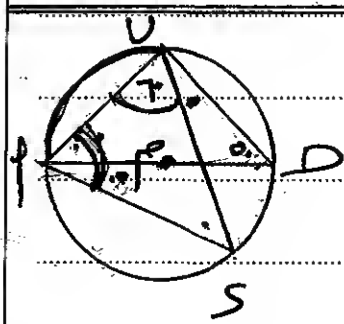
نتيجة

الزوايا المحيطية التي تحصر أقواساً متساوية (في الدائرة الواحدة أو عدة دوائر) تكون متساوية في القياس



ق(∠أ) = ق(∠ب) = ق(∠ح)

مثال ١



في الشكل أح قطر

أوجد ق(∠ح ب ى) ، ق(∠ب أ ى)

الحل

ق(∠ح) = ق(∠ى) = ٥٠°

لأنهما تحصران ⌒أب

∴ ق(∠ب أ ى)

= ١٨٠° − (٥٠° + ٦٠°)

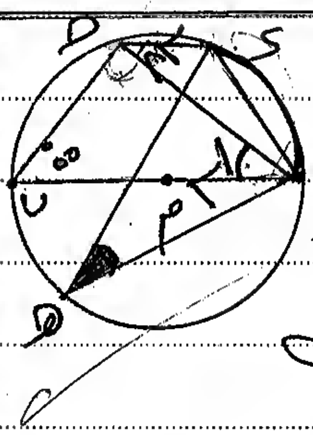
= ٧٠°

∵ أح قطر

∴ ق(∠ح ب أ) = ٩٠°

ق(∠ح ب ى) = ٣٠°

مثال ٢



أوجد

ق(∠أ هـ ى)

الحل

∵ أب قطر

∴ ق(∠أ ح ب) = ٩٠°

∴ ق(∠١) = ٩٠° − ٥٥ = ٣٥°

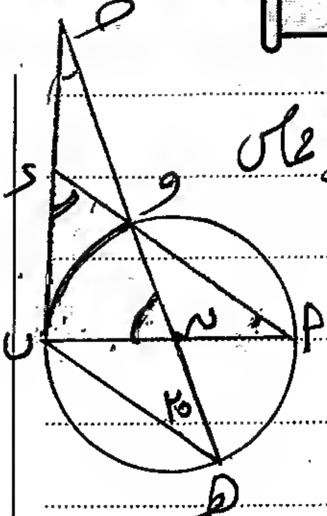
∵ ى ح // أب

∴ ق(∠٢) = ق(∠١) = ٣٥° بالتبادل

∴ ق(∠أ هـ ى) = ق(∠٢)

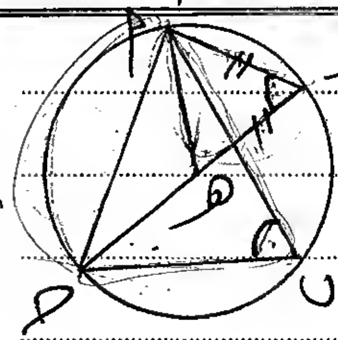
= ٣٥° تقريبية

لأنهما تحصران ⌒أى



مثال ③
أ ب قطر، $\overrightarrow{ب د}$ مماس
أوجد
① ق(∠ب م و)
② ق(∠ب و م)
③ ق(∠ب د أ)

الحل
∵ ق(∠أ) = ق(∠هـ) = ٣٥
نظرية ٢ محيطيان على $\overset{\frown}{و ب}$
∵ ق(∠و م ب) مركزية
= ٧٠° ضعف المحيطية
ق(∠م ب د) = ٩٠°
حيث $\overline{م ب}$ ⊥ $\overline{ب د}$ (مماس)
ق(∠د) = ٩٠° − ٧٠° = ٢٠°
ق(∠أ د ب) = ٩٠° − ٣٥ = ٥٥



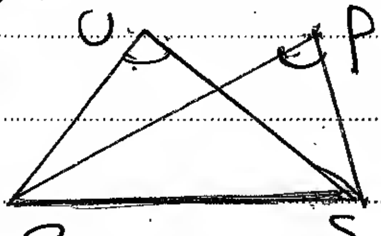
مثال ④
أ د = د هـ
٦ △ أ ب جـ
متساوي الأضلاع
اثبت أن △ أ د هـ
متساوي الأضلاع
الحل

∵ △ أ ب جـ متساوي الأضلاع
∴ ق(∠ب) = ٦٠°
∵ ق(∠د) = ق(∠ب) = ٦٠
نظرية محيطيان $\overset{\frown}{أ جـ}$
∵ أ د = د هـ معطى
∴ △ أ د هـ متساوي الساقين
وبه ٦٠° ∴ يصبح
متساوي الأضلاع

الشكل الرباعي الدائري

هو شكل رباعي تمر برؤوسه دائرة واحدة

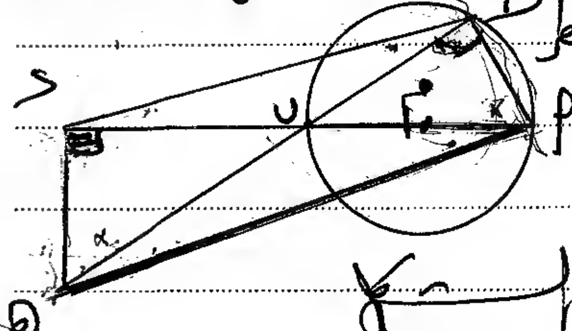
* عكس النظرية
إذا تساوى قياسا زاويتين مرسومتين على قاعدة واحدة ومن جهة واحدة منها فإنه تمر برؤوسها دائرة واحدة تكون هذه القاعدة وترًا فيها



إذا كان
ق(∠أ) = ق(∠ب)
∴ يمكن رسم دائرة تمر بالرؤوس أ، ب، جـ، د

إعداد م/ ناصر أبوزيد

∵ أب قطر



ج) الشكل

اثبت انه

أ هـ د م شكل رباعي دائري

الحل

∵ أب قطر

∴ ق(∠أ ب ب) = ٩٠°

∴ ق(∠أ ب هـ) = ق(∠أ د هـ)

= ٩٠° وهما مرسومتان على أ هـ

∴ الشكل أ ب د هـ

رباعي دائري

∵ م ب (قطر) ⊥ ب ص مماس

∴ ق(∠ب) = ٩٠°

∵ أ س = س ب

∴ م س ⊥ أ ب

∴ ق(∠م س ص) = ٩٠°

∴ ق(∠س) = ق(∠ب) = ٩٠°

وهما مرسومتان

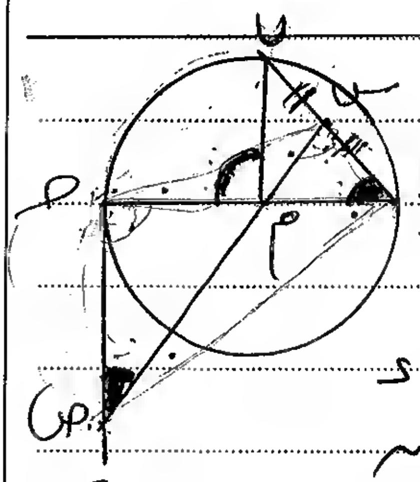
على م ص

∴ الشكل م س ب ص

رباعي دائري

هـ اثباته

هـ اثباته



الحل

أ ب قطر

ب ص مماس

أ س = س د

بـ هـ انه

① الشكل م س ص ب رباعي

دائري

② ق(∠ب م ص) = ٢ ق(∠م أ ص)

الحل

∴ ق(∠ص) = ق(∠م) ← ①

لأنهما مرسومتان على س ص

∵ ق(∠أ) المحيطية

= ½ ق(∠م) المركزية

← ②

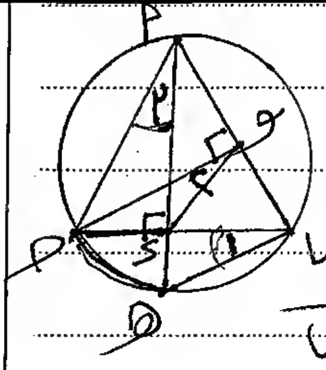
ق(∠أ) ②

∴ ق(∠ب م ص) = ٢ ق(∠م أ ص)

هـ . ط . ث

مثال (١)

في الشكل (١)



أء ⊥ ب جـ ، جـ هـ ⊥ أ ب

برهن أن

① الشكل أ و ء جـ رباعي دائري

② ق(هـ ب ك) = ق(ء و ك)

الحل

∵ ق(أ و جـ) = ق(أ ء جـ) = ٩٠° معطى

وهما مرسومتان على أ جـ

∴ الشكل أ و ء جـ رباعي دائري ← (١)

∵ الشكل رباعي دائري

ق(٢) = ق(٣) ← I

∴ ق(١) = ق(٣)

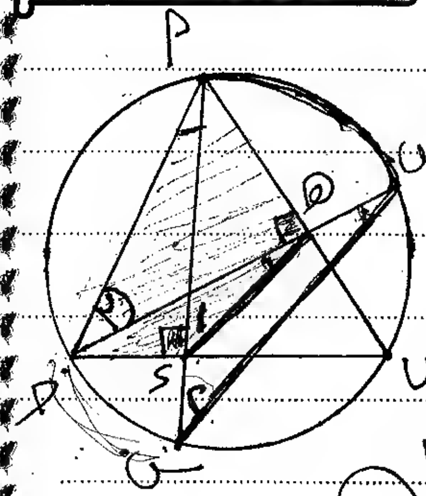
قطرية

محيطيتان تحصران هـ جـ ← II

من I ، II ∴ ق(١) = ق(٢)

مثال (٢)

في الشكل (١)



إثبت أن

س ص // ء هـ

الحل

∵ ق(أ هـ جـ) = ق(أ ء جـ) = ٩٠° معطى

وهما مرسومتان على أ جـ

∴ الشكل أ هـ ء جـ رباعي دائري

ومن خواصه

∴ ق(١) = ق(٣) ← I

∵ ق(٢) = ق(٣) قطرية

[illegible] يحصران أ جـ ← II

من I ، II

∴ ق(١) = ق(٢)

وهما في وضع تبادل

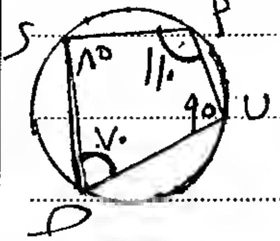
∴ س ص // ء هـ

وهو م.ط

خواص الرباعي الدائري

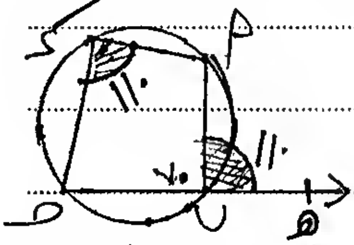
نظرية

اذا كان الشكل رباعي دائري فإن كل زاويتين متقابلتين متكاملتين



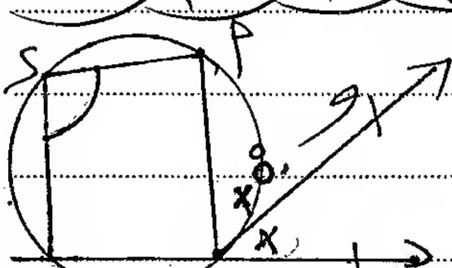
نتيجة

قياس الزاوية الخارجة عند أي رأس من رؤوس الشكل الرباعي الدائري = قياس الزاوية الداخلة المقابلة للمجاورة



ق(∠ أ ب هـ) = ق(∠ د)

مثال



اوجد ق(∠ د)

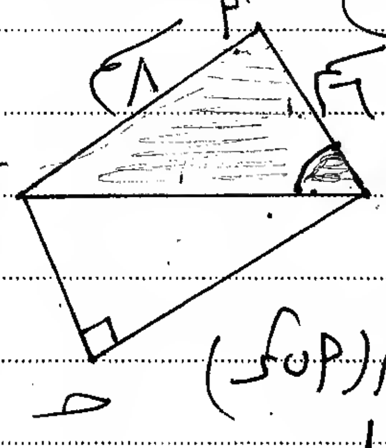
الحل

∵ ق(∠ و ب أ) = ٥٠°

∴ ق(∠ هـ ب أ) = ١٠٠°

∴ ق(∠ د) = ١٠٠°

مثال (1) أ ب جـ د شكل رباعي دائري



أوجد مساحة △ أ ب د

ثم أوجد ق(∠ أ ب د)

الحل

∵ الشكل أ ب جـ د رباعي دائري

∴ ق(∠ أ) + ق(∠ جـ) = ١٨٠°

[illegible]

ق(∠ أ) = ٩٠°

م △ أ ب د = ½ × ٦ × ٨ = ٢٤ سم²

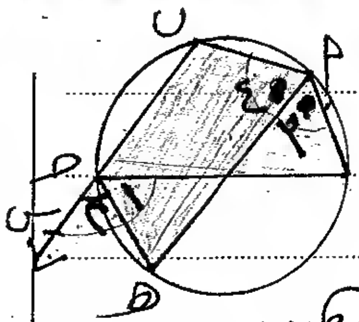
[illegible] ←

∵ ظا ب = ٨/٦

∴ ق(∠ أ ب د) = Shift Tan $\frac{8}{6}$ = ٥٣° ٧َ

سبحان الله وبحمده
سبحان الله العظيم

مثال ①



في الشكل

أهـ ينصف ∠ د أ ب

بر هـ جـ س

جـهـ ينصف ∠ س جـ د

الحل

∵ ق(∠٣) = ق(∠١)

محيطيتان تحصران دهـ

∵ ق(∠٢) = ق(∠٤) معطى

∴ ق(∠٤) = ق(∠١) ——— I

∵ ق(∠٢) = ق(∠٤) نتيجة ——— II

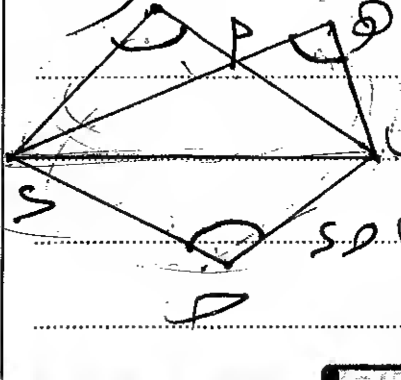
ق(∠٢) خارجة عن الشكل أهـ جـ ب

من I ، II

∴ ق(∠١) = ق(∠٥)

∴ جـهـ ينصف ∠ د جـ س

مثال ②



في الشكل

هـ ب جـ د ، و ب جـ د

رباعي دائري

أثبت أن الشكل

هـ ب د و رباعي دائري

الحل

∵ الشكل هـ ب جـ د

رباعي دائري

∴ ق(∠هـ) تكمل ق(∠جـ)

——— ①

الشكل و ب جـ د

رباعي دائري

∴ ق(∠و) تكمل ق(∠جـ)

← ②

من ①، ②

∴ ق(∠هـ) = ق(∠و)

وهما مرسومتان على ب د

∴ الشكل هـ ب د و

رباعي دائري

عكس النظرية

إذا وجدت زاويتان متقابلتان

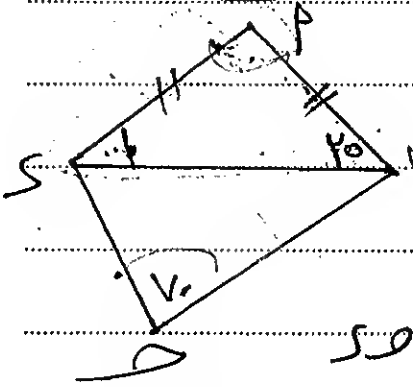
متكاملتان في شكل رباعي كان هذا

الشكل رباعي دائري

نتيجة

اذا وجدت زاوية خارجة عن شكل رباعي تساوي قياس الزاوية الداخلة المقابلة للمجاورة كان الشكل رباعي دائري

مثال



أب = أد

اثبت ان الشكل أ ب جـ د رباعي دائري

الحل

∵ أب = أد

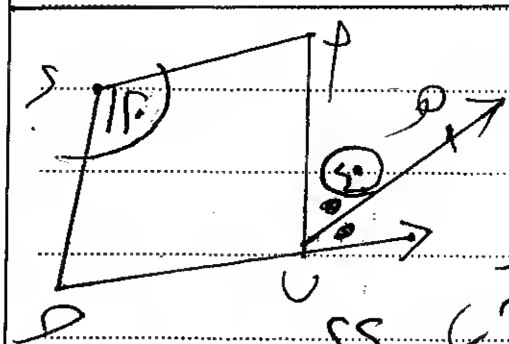
∴ ق(∠١) = ٣٥°

∴ ق(∠أ) = ١٨٠° − ٧٠° = ١١٠°

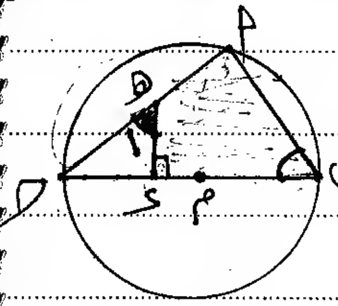
∴ ق(∠أ) + ق(∠جـ) = ١٨٠° وهما متقابلتان

∴ الشكل أ ب جـ د رباعي دائري

هل الشكل أ ب جـ د رباعي دائري ؟؟



مثال (١)



في الشكل ب جـ قطر في م

هـ د ⊥ ب جـ

برهن ان (١) الشكل أ ب د هـ رباعي دائري

(٢) ق(∠هـ د أ) = ½ ق(أ جـ)

الحل

(١) ∵ ب جـ قطر

∴ ق(∠أ) = ٩٠°

∴ ق(∠أ) + ق(∠د) = ١٨٠° وهما متقابلتان

∴ الشكل أ ب د هـ رباعي دائري

اولاً ←

ومنه نحصل على

ق(∠١) = ق(∠ب) ← I

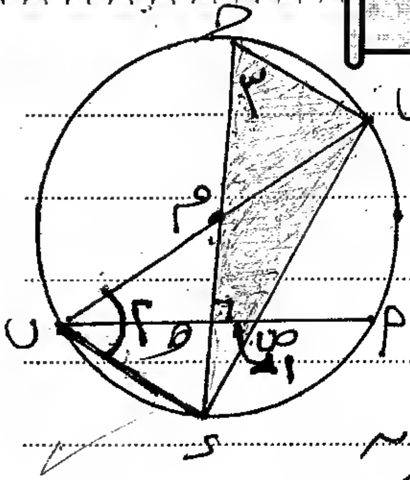
خارجة

∵ ق(∠ب) = ½ ق(أ جـ) ← II

من (١)، (٢)

∴ ق(∠١) = ½ ق(أ جـ)

مثال (٤)



في الشكل

دهـ قطر

⊥ أب

أثبت أن

(١) الشكل س ص هـ ص رباعي دائري

(٢) ق(∠د ص ب) = ق(∠د ب س)

الحل

∵ دهـ قطر

∴ ق(∠د س هـ) = ٩٠°

نتيجة

∴ ق(∠هـ س ص) + ق(∠ص و هـ) = ١٨٠°

وهما متقابلتان

∴ الشكل س ص و هـ رباعي دائري ← أولاً

وهو مطلوب أولاً

ق(١) الخارجة = ق(٣)

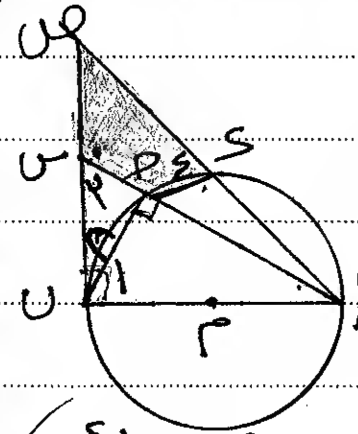
نتيجة

∵ ق(٢) = ق(٣) محيطيتان

∴ ق(١) = ق(٢)

وهو المطلوب ثانياً

مثال (٥)



في الشكل

أب قطر في م

ب ص مماس

برهن أن

س ص د هـ رباعي دائري

الحل

∵ أب قطر

∴ ق(∠أ د ب) = ٩٠°

∵ أب (قطر) ⊥ ب ص (مماس)

∴ ق(∠أ ب ص) = ٩٠°

∵ ق(١) + ق(٢) = ٩٠°

∵ ق(ص) = ٩٠°

∴ ق(٢) + ق(٣) = ٩٠°

∴ $\boxed{ق(١) = ق(٣)}$ ← I

∵ الشكل أ د هـ ب رباعي دائري

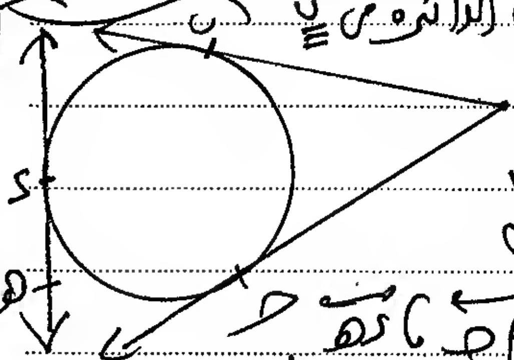
∴ ق(٤) الخارجة = ق(١) نتيجة ← II

من I ، II ∴ ق(٣) = ق(٤)

وهي خارجة ∴ الشكل رباعي دائري

التماس والزاوية المماسية

أب يمس الدائرة م في ب



في الشكل

أب ، أجـ مماسات للدائرة

ملحوظات هامة

١ عدد المماسات المشتركة لدائرتين متباعدتين هو ٤

٢ عدد المماسات المشتركة لدائرتين متماستين من الخارج ٣

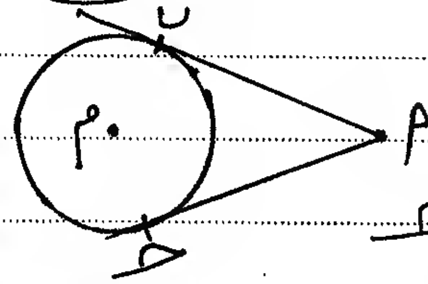
٣ عدد المماسات المشتركة لدائرتين متماستين من الداخل ١

٤ عدد المماسات المشتركة لدائرتين متقاطعتين هو ٢

نظرية

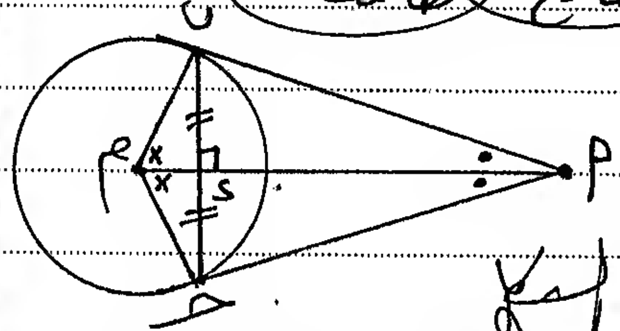
القطعتان المماسيتان المرسومتان من نقطة خارج الدائرة متساويتان في الطول

في الشكل



أب = أجـ

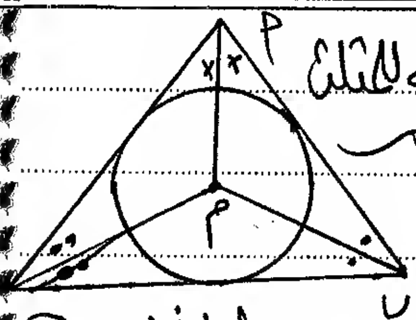
نتائج هامة



في الشكل

١ م أ محور تماثل الوتر ب جـ

٢ أ م ينصف زاويتي أ ، م



الدائرة الداخلة للمثلث

هي الدائرة التي تمس أضلاعه من الداخل

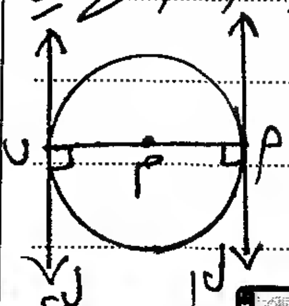
ملحوظة هامة جدا

مركز الدائرة الداخلة للمثلث هو نقطة تقاطع منصفات زواياه

تذكر

المماسات المرسومة من طرفي قطر في دائرة متوازيان

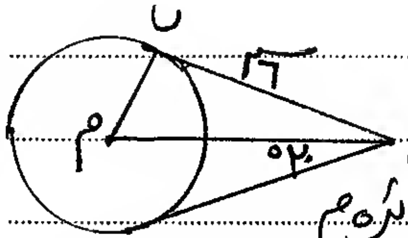
ل ∥ ل



تذكر أن

مركز الدائرة الخارجة للمثلث هي نقطة تقاطع محاور تماثل أضلاعه

(١)



في الشكل $\overline{أب}$، $\overline{أج}$ مماسان للدائرة م

أوجد ق(∠أمب)، طول $\overline{أج}$

الحل

∵ $\overline{أب}$، $\overline{أج}$ مماسان

∴ أب = أج = ٦ سم نظرية

∵ $\overrightarrow{أم}$ ينصف ∠أ نتيجة

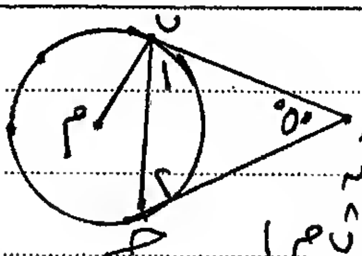
∴ ق(∠بأم) = ٣٠°

∵ $\overline{مب}$ (نق) ⊥ $\overline{أب}$ (مماس)

∴ ق(∠ب) = ٩٠°

∴ ق(∠أمب) = ٩٠ − ٣٠ = $\boxed{٦٠}$

(٢)



في الشكل $\overline{أب}$، $\overline{أج}$ مماسان

أوجد ق(∠جبم)

الحل

∵ $\overline{أب}$، $\overline{أج}$ مماسان متقاطعان

∴ أب = أج نظرية

∴ ق(∠١) = ق(∠٢)

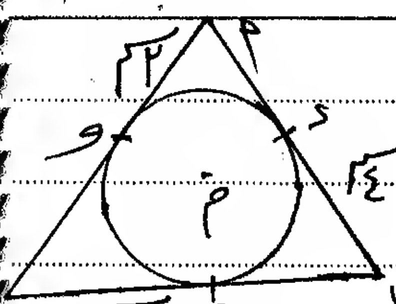
∵ ق(∠أ) = ٥٠°

∴ ق(∠١) = $\frac{١٨٠ - ٥٠}{٢}$ = $\boxed{٦٥}$

∵ $\overline{مب}$ ⊥ $\overline{أب}$ ⟸ ق(∠مبأ) = ٩٠°

∴ ق(∠مبج) = ٩٠ − ٦٥ = $\boxed{٢٥°}$

(٣)



في الشكل م دائرة داخلة △أبج

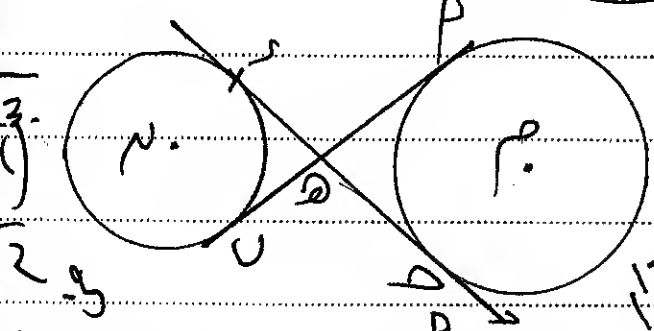
أوجد محيط △أبج

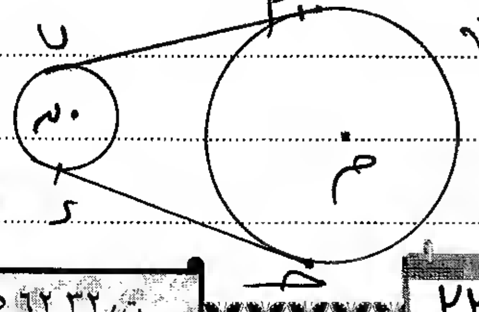
الحل

* أد = أو = ٣ سم
* بد = به = ٤ سم
* جو = جه = ٦ سم

∴ محيط △أبج = ٧ + ١٠ + ٩ = ٢٦ سم

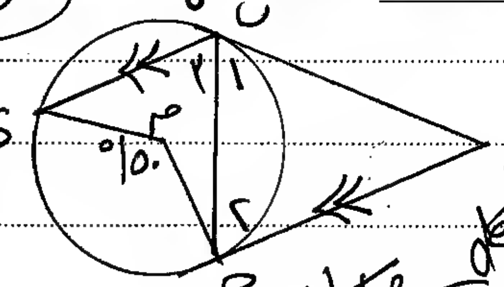
(٤)





هندسة

٥



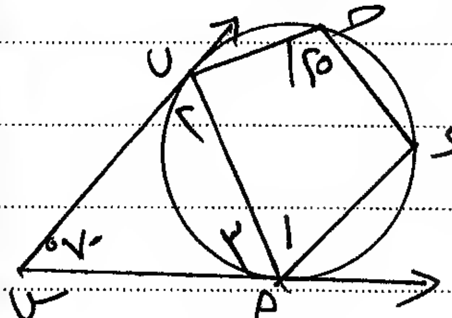
في الشكل $\overline{أب}$ ، $\overline{أج}$ مماسان ، $\overline{أج} \parallel \overline{ب د}$ أثبت أن $\overline{ب ج}$ ينصف $\angle أ ب د$ ثم أوجد ق($\hat{أ}$)

الحل

∵ أب = أج تطرية
مماسان
∴ ق($\hat{1}$) = ق($\hat{2}$) ← I
∵ $\overline{أج} \parallel \overline{ب د}$ مع قاطع
∴ ق($\hat{2}$) = ق($\hat{3}$) بالتبادل ← II
من I ، II
∴ ق($\hat{1}$) = ق($\hat{3}$)
∴ $\overline{ب ج}$ ينصف $\angle أ ب د$
أولاً

∵ ق($\hat{2}$) = $\frac{1}{2}$ ق($\hat{م}$) المركزية
ق($\hat{2}$) = ٧٥°
∴ ق($\hat{1}$) = ٧٥°
∴ ق($\hat{أ}$) = ١٨٠° − (٧٥ + ٧٥)
∴ ق($\hat{أ}$) = ١٨٠° − ١٥٠
$\boxed{∴ ق(\hat{أ}) = ٣٠°}$

٦



في الشكل المقابل $\overleftrightarrow{س ص}$ ، $\overleftrightarrow{س ب}$ مماسان أثبت أن
(١) $\overline{أ ب}$ ينصف $\angle د أ س$
(٢) $\overline{أ د} \parallel \overline{ب س}$

الحل

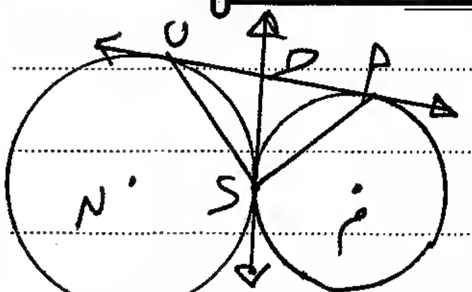
∵ الشكل أ د ج ب رباعي دائري
∴ ق($\hat{1}$) = ١٨٠ − ١٢٥ = ٥٥°
∵ $\overleftrightarrow{س أ}$ ، $\overleftrightarrow{س ب}$ مماسان
∴ س أ = س ب تطرية
∴ ق($\hat{3}$) = ق($\hat{2}$)
، ق($\hat{س}$) = ٧٠°
∴ ق($\hat{2}$) = $\frac{١٨٠ - ٧٠}{٢}$ = ٥٥°
∴ ق($\hat{1}$) = ق($\hat{2}$)
∴ $\overrightarrow{أب}$ ينصف $\angle د أ س$
أولاً

∵ ق($\hat{1}$) = ق($\hat{3}$) = ٥٥°
وهما في وضع تبادل
∴ $\overline{أ د} \parallel \overline{ب س}$ ثانياً

سبحان الله وبحمده
سبحان الله العظيم

٧

في الشكل المقابل



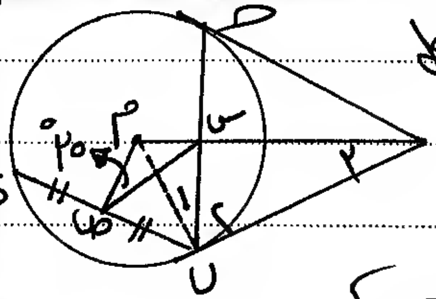
م ، ن دائرتان متماستان من الخارج
أب ، جـ د مماسات مشتركة
اثبت أن
(١) جـ منتصف أب
(٢) أ د ⊥ د ب

الحل

∵ جـ أ ، جـ د مماسان لـ م
∴ جـ أ = جـ د نظرية (١)
مثلاً
جـ د = جـ ب ← نظرية (٢)
من (١) ، (٢)
∴ جـ أ = جـ ب
∴ جـ منتصف أب ← أولاً
∵ جـ د = جـ أ = جـ ب
∴ جـ د = $\frac{1}{2}$ أب
جـ د متوسط
∴ ق(∠أ د ب) = ٩٠° ← ثانياً
عكس نظرية ٢ ، ٤

٨

في الشكل



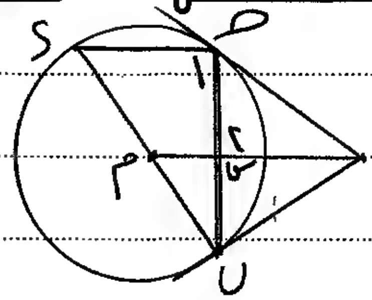
أ جـ ، أ ب مماسان
ب هـ = هـ د ، ق(∠س جـ م) = ٢٥° اثبت
(١) الشكل م س ب هـ رباعي دائري
(٢) ق(∠أ) أوجدها

الحل

∵ أ جـ ، أ ب مماسان
∴ م أ ⊥ ب جـ نتيجة
∴ ق(∠م س ب) = ٩٠°
∵ ب هـ = هـ د معطى
∴ م هـ ⊥ ب د نتيجة
∴ ق(∠م هـ ب) = ٩٠°
∴ ق(∠م س ب) + ق(∠م هـ ب) = ١٨٠°
وهما متقابلتان
∴ الشكل م س ب هـ رباعي دائري
وهو مطلوب أولاً
ق(∠١) = ق(∠س جـ م) = ٢٥°
∵ م ب (نق) ⊥ أ ب (مماس)
∴ ق(∠٢) = ٩٠ − ٢٥ = ٥٥°
∵ ق(∠س) = ٩٠°
∴ ق(∠٣) = ٩٠ − ٥٥ = ٣٥°
∴ ق(∠أ) = ٢ × ٣٥ = ٧٠°

يتبع

٩) في الشكل: أ ب ، أ جـ مماسان ، ب د قطر
أثبت أن أ م // جـ د



الحل

العمل: نصل ب جـ

∵ ب د قطر   محيطية

∴ ق(∠ب جـ د) = ٩٠°

نتيجة

∵ أ ب ، أ جـ مماسان

∴ أ م ⊥ ب جـ   بالعكس

∴ ق(∠أ س جـ) = ٩٠°

∴ ق(∠١) = ق(∠٢) = ٩٠°

وهما في وضع تبادل

∴ أ م // جـ د

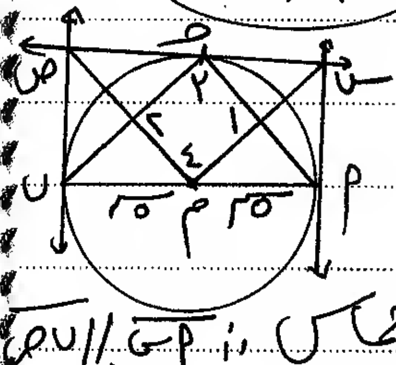
وهو المطلوب

١٠) أ ب قطر في دائرة م طوله ١٠ سم ، جـ د للدائرة م رسم مماس عند جـ فقطع المماسين لها عند أ ، ب في س ، ص حيث س ص = ١٢ سم أثبت أن

(١) س م ⊥ ص م

(٢) أوجد مساحة الشكل أ س ص ب

الحل



م أ ⊥ أ س

نق م أ ، أ س مماس

م ب ⊥ ب ص

ب ص مماس ← س أ مماس ∴ أ س // ب ص

∵ س م ⊥ م ص   نتيجة

بمثلث

م جـ ⊥ س ص (وتر تماس)

∴ ق(∠١) = ق(∠٢) = ٩٠°

∵ أ ب قطر   محيطية

∴ ق(∠٣) = ٩٠°

مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي = ٣٦٠°

∴ ق(∠٤) = ٩٠°

∴ س م ⊥ م ص

أولاً

∵ أ س = س جـ
، جـ ص = ص ب   نظرية

∴ أ س + ب ص = س جـ + جـ ص

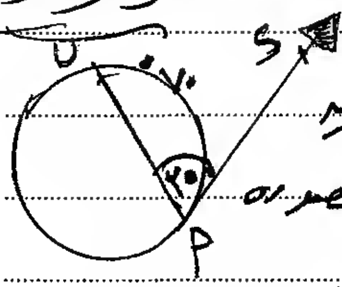
∴ أ س + ب ص = ١٢ سم

مساحة شبه المنحرف أ س ص ب

= ½ (أ س + ب ص) × أ ب

= ½ × ١٢ × ١٠ = ٦٠ سم²

الزاوية المماسية

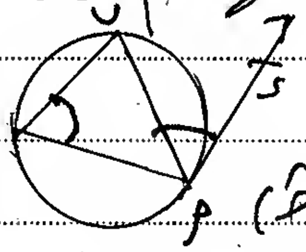


الزاوية المماسية
هي زاوية محصورة بين مماس ووتر
وقياسها = ½ ق (القوس)

* ق(∠أ) = ½ ق(أب⌒)

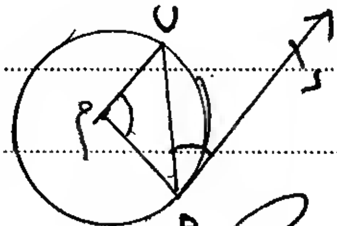
نظرية

قياس الزاوية المماسية تساوي قياس المحيطية المشتركة معها في القوس



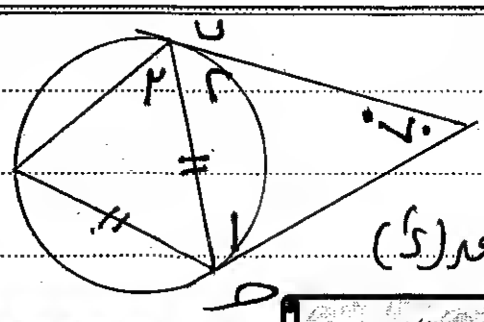
في الشكل
ق(∠د أ ب) = ق(∠ح)

نتيجة



ق(∠د أ ب)
= ½ ق(∠م) المركزية

مثال (1)



في الشكل
أوجد ق(∠د)
ثم اثبت ان
$\overline{أح} // \overline{بد}$

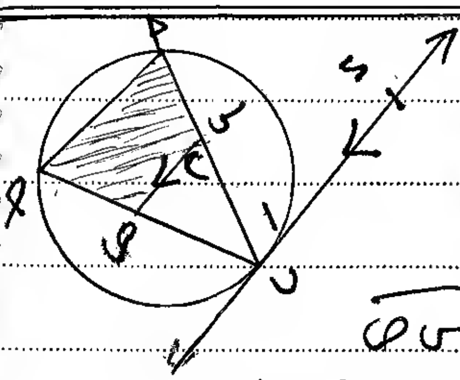
الحل

∵ أح = أب مماسان
∴ ق(∠١) = ق(∠٢)
= (١٨٠ − ٧٠) ÷ ٢ = ٥٥

∵ ق(∠١) المماسية = ق(∠د)
= ٥٥°
∵ حب = حد
∴ ق(∠د) = ق(∠٣) = ٥٥°

∴ ق(∠١) = ق(∠٣) = ٥٥°
وهما في وضع تبادل
∴ $\overline{أح} // \overline{بد}$

مثال (2)



في الشكل
بد مماس
$\overline{دب} // \overline{سص}$
اثبت ان الشكل أ س ص ح
رباعي دائري

الحل

إعداد أ/ ناصر ابوزيد

∵ كن // سه مستقيم

∴ ق(١) = ق(٢) بالتبادل → I

∵ كن مماس

∴ ق(١) المماسية = ق(٤) المحيطية وهما التناظر

تطوير → II

من I ، II

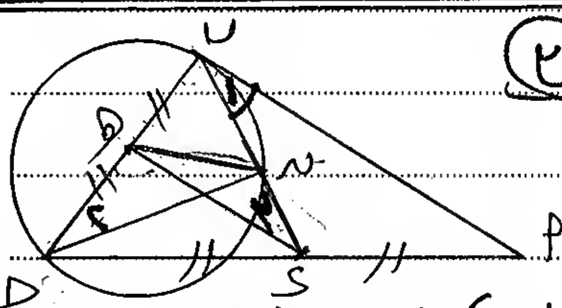
∴ ق(٢) = ق(٤)

وهما خارج

∴ الشكل م س ه ص

رباعي دائري

مثال ٢



في الشكل $\overleftrightarrow{أب}$ مماس

أد = دج ،

ب هـ = هـ ج برهن ان

[1] $\overline{أب} // \overline{ده}$

[2] اثبت ان الشكل ب د ج هـ رباعي دائري

الحل

∵ أد = دج ، منتصف

ب هـ = هـ ج

∴ $\overline{ده} // \overline{أب}$

← ملاحظة

ق(١) = ق(٢) ← I

بالتبادل

∵ أب مماس

∴ ق(١) المماسية = ق(٣)

المحيطية ← II

من I ، II

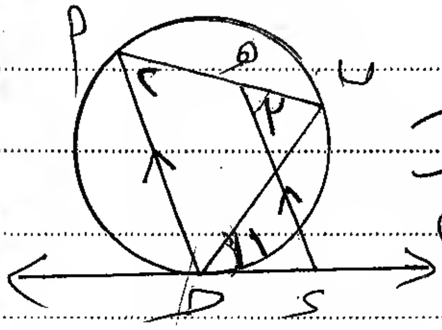
∴ ق(٢) = ق(٣)

وهما مرسومتان على ب هـ

∴ الشكل ب د ج هـ

رباعي دائري

مثال ٤



$\overline{دهـ} // \overline{أج}$

$\overleftrightarrow{كص}$ مماس

برهن ان

الشكل ب هـ و د رباعي دائري

الحل

ت/ ٠١١١٥١٥٦٢٣٢

∵ هـ ى // أ ب مستقيم

∴ ق(أ) = ق(٢) بالتبادل ← I

∵ ى ص مماس

∴ ق(١) المماسية = ق(٢)

تناظر ← II

من I ، II

∴ ق(١) = ق(٢)

وهما مرسومتان على ى ن

∴ الشكل ن هـ ص ى رباعي دائري

عكس النظرية

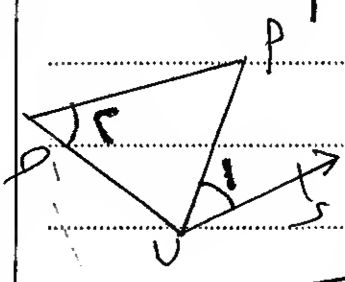
في الشكل

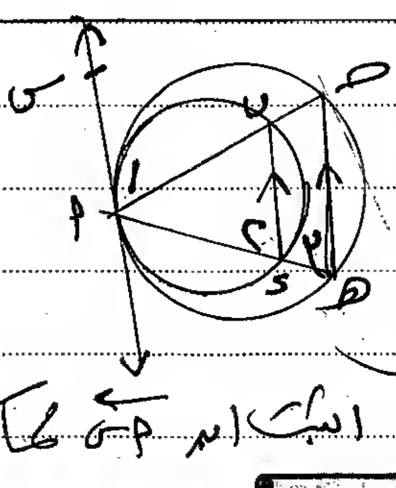
إذا كان

ق(١) = ق(٢)

فإن ن ى مماس

للدائرة المارة برؤوس △ أ ب ن





في الشكل

أ س مماس للدائرة الكبرى

ن ى // ص هـ أثبت أن أ س مماس

للدائرة الصغرى

الحل

∵ أ ص مماس للكبرى

∴ ق(١) المماسية = ق(٢)

∵ ن ى // ص هـ

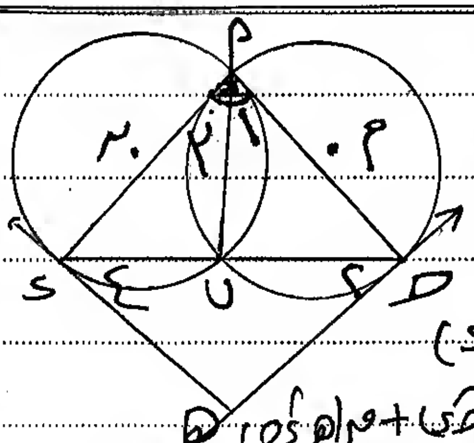
∴ ق(٢) = ق(٤)

ق(١) = ق(٤)

∴ أ ص مماس للصغرى

عكس النظرية

مثال ٢



في الشكل

أثبت

ق(ص أ ى)

= ق(هـ ص ى) + ق(هـ ى ص)

أثبت أن الشكل أ ص هـ ى رباعي دائري

الحل

∵ ص هـ مماس للأولى

ق(٢) = ق(١) ← I

هـ ى مماس للثانية

∴ ق(٤) = ق(٣) ← II

بالجمع

ق(∠ هـ م ك) =

ق(∠٢) + ق(∠٤) ← أولاً

∴ ق(∠٣) + ق(∠٤) + ق(∠هـ) = ١٨٠°

∴ ق(∠ هـ م ك) + ق(∠هـ) = ١٨٠°

وهما متقابلتان

∴ الشكل أ م هـ د رباعي دائري

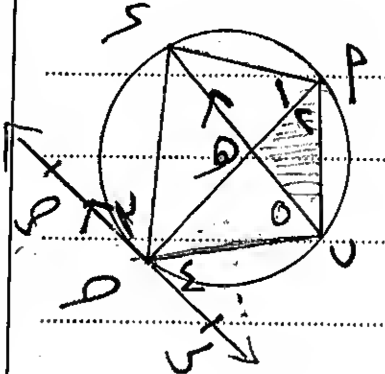
∵ ق(∠٥) = ق(∠١)

ق(∠١) = ق(∠٢)

∴ ق(∠٥) = ق(∠٢)

∴ ب ك مماس للدائرة المارة برؤوس △ أ ب هـ

مثال ④



في الشكل ب ك مماس

س ص // ب ك

برهن أن

① م ك ينصف ∠ ب م ك

② ب ك مماس للدائرة المارة برؤوس △ أ ب هـ

الحل

∵ س ص مماس

ق(∠٤) = ق(∠٢) محيطية

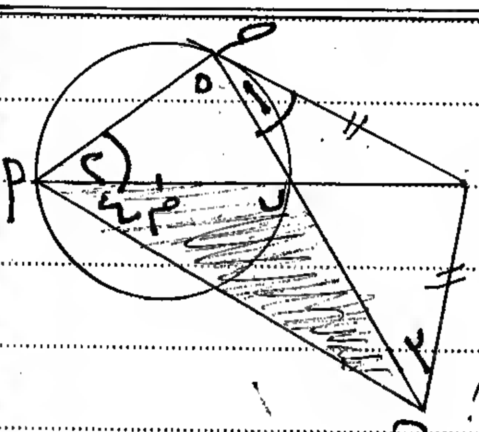
∵ س ص // ب ك

∴ ق(∠٤) = ق(∠٥) بالتبادل

ق(∠١) = ق(∠٥) محيطيتان

∴ ق(∠١) = ق(∠٢) ← الحل

مثال ⑤



أ ن قطر

د ك مماس ك

د هـ = د م

برهن أن

① الشكل أ م د هـ رباعي دائري

② أ هـ قطر للدائرة المارة برؤوس △

الحل

∵ د ك مماس ∴ ق(∠١) = ق(∠٢)

∵ د هـ = د م ∴ ق(∠٣) = ق(∠١)

∴ ق(∠٢) = ق(∠٣) وهما مرسومتان على د ك ∴ الشكل أ م د هـ رباعي دائري

∵ أ ن قطر ∴ ق(∠٥) = ٩٠°

∴ هـ م قطر للدائرة المارة به

∵ ق(∠١) = ق(∠٤) لأن الشكل أ م د هـ رباعي دائري

∴ ق(∠٤) = ق(∠٣) ∴ د هـ مماس للدائرة المارة برؤوس △ أ ب هـ